انتشارات دانشگاه تهران

۲۷

دکتر علینقی وحدتی

استاد دانشکدهٔ علوم

هندسه تحلیلی

انتشارات دانشگاه تهران
۲۷

دکتر علینقی وحدتی

استاد دانشکدهٔ علوم

۱۳۲۷

هندسه تحلیلی

بخش نخست

بردار ها

چندیهای راستا دار

۱ ـ چندیهای عددی و چندیهای راستا دار ـ چندیهائیکه با آنها سر و کار داریم بر حسب عده و نوع عوامل ریاضی لازم جهت تعیینشان بدو دسته تقسیم میشوند.

اول آنهائیکه بوسیله یك مقایسه فقط با مقداری از نوع خودشان که واحد اختیار شده است کاملا توسط یك عدد مشخص میشوند.

این عدد مثبت یا منفی واندازهٔ آن چندی بوده وچنین چندیها را اسکالر نامند مثال طول ـ سطح ـ حجم ـ گوشه و غیره.

دوم آنهائیکه توسط یك عدد ویك سوی هندسی و گاهی توسط نقطه عملشان تعیین میشوند چنین چندیها را راستا دار ویابرداری نامندزیرا میتوانآنها را بوسیله یك بردار نمایش داد.

مثال ـ سرعت ویا شتاب یك‌نقطه مادی، دوران یك جسم در حول یك محور و غیره.

۲ ـ بردار ـ بردار پاره خطی است محدود بین دو نقطه که یکی را آغاز و دیگری را انجام مینامیم. میتوان گفت‌که بردار پاره خط راستا دار است.

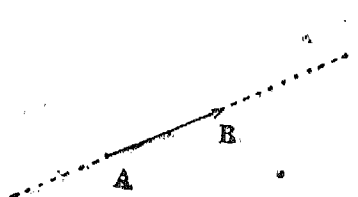
بردار را با دو حرف که اولی ازسمت چپ آغاز ودومی انجام آنست نمایش داده و روی آن علامت سهم میگذاریم $\overrightarrow{AB}$ اغلب اوقات آنرا جهت آسانی محاسبه با یك حرف مثلا $\vec{a}$ نیز نمایش میدهیم.

۳ - عوامل یك بردار - چنانکه برداری داده شده باشد طول پاره خط آن یك چندی اسکالر بوده و چنانکه یك یکه طول انتخاب کنیم طول این پاره خط قدر مطلق آن بردار میباشد پس از آنجا یك بردار با چهار عامل مشخص میشود

۱ - مبداء آن A

۲ - امتداد خطی که حامل آنست .

۳ - سوی جنبش در روی این امتداد که از مبداء A بسمت B است .

٤ - قدر مطلق آن .

خطی که بردار روی آن واقع و از دو طرف نامحدود است حامل بردار نامیده میشود

بردار صفر برداری است که انتهای آن بر مبداء آن منطبق باشد . قدرمطلق چنین بردار صفر بوده امتداد و سوی آن نیز غیر مشخصند .

ش ۱

۴ - همسنگی - دو بردار را همسنك گوئیم وقتی موازی ، هم سو ، و قدر مطلقشان یکی باشد و یا بعبارت ساده بتوان با یك انتقال یکی را بر دیگری منطبق نمود . همسنگی را با علامت = نمایش میدهیم $\vec{a} = \vec{a'}$

همسنگی دارای همان خواص تساوی بوده مثلا چنانکه $\vec{a} = \vec{b}$ باشد $\vec{b} = \vec{a}$ نیز خواهد بود .

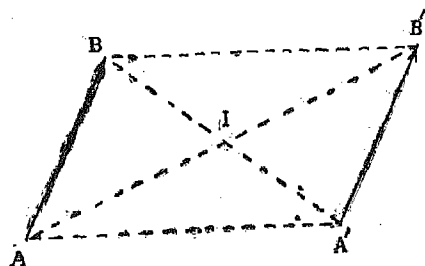
چنانکه $\vec{a} = \vec{b}$ و $\vec{b} = \vec{c}$ باشد $\vec{a} = \vec{c}$ خواهد بود .

اگر دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ همسنك باشند شکل A B B' A' متوازی - الاضلاع بوده و میتوان دو بردار را با انتقالی مساوی $\overrightarrow{AA'}$ برهم منطبق نمود و همچنین $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BB'}$ نیز همسنك میباشند .

چنانکه برداری مساوی صفر باشد آنرا مثل جبر بصورت $\vec{a} = 0$ نمایش میدهیم .

همچنانکه در عملیات جبری روی اعداد میتوان بجای عددی مساوی آنرا

قرار داد بدون آنکه در نتیجه تغییری حاصل شود بهمینطور میتوان در عملیات روی بردارها واسکالرها بردارها و اسکالرهای مساویشانرا بجای آنها قرار داد و نتیجه حاصل یکی خواهد شد. بطریق دیگر نیز میتوان چنین بیان نمود.

در محاسبات برداری عوامل محاسبه و همچنین نتایج حاصل با تقریب یك همسنگی یا یك تساوی تعیین میشوند.

۵ - بردار های موازی - چنانکه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی باشند میتوان علاوه برقدرمطلق آنها سوی آنها را با هم مقایسه نمود.

ش ۲

نسبت دو بردار موازی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مساوی خارج قسمت قدر مطلق های آنهاست با علامت $+$ یا $-$ بر حسب آنکه دو بردار هم سو یا با سو های مختلف باشند.

خط راستا دار یا محورخطی است که روی آن یك بردار $\vec{u}$ که بجای واحد بکار میرود انتخاب شده است جهت این بردار جهت محور وتمام بردار های موازی آنرا با آن مقایسه میکنند. بردار $\vec{u}$ را بردار یکه نامند.

اندازه هر بردار نسبت آن به بردار یکه محوری که موازی آنست میباشد. از آنجا نتیجه میشود که نسبت دو بردار موازی یك محور مساوی خارج قسمت اندازه های آنهاست.

اندازه بردار $\overrightarrow{AB}$ یا $\vec{a}$ را باعلامت $\overline{AB}$ یا $\overline{a}$ نمایش میدهیم درحالیکه قدر مطلق آن که قدرمطلق اندازه است با علامات $|\overrightarrow{AB}|$ یا $|\overline{AB}|$ و یا $|\vec{a}|$ و $|\overline{a}|$ نشان داده میشود.

۶ - حاصل ضرب یك بردار در یك عدد - حاصل ضرب بردار $\vec{a}$ دراسکالر

و یا عدد k مساوی برداریست که دارای همان امتداد $\vec{a}$ و نسبت آن به $\vec{a}$ مساوی k باشد. این بردار با تقریب یك همسنگی تعیین گشته و آنرا با $k\vec{a}$ نمایش میدهیم

تمام بردار های $\vec{a}$. k موازی $\vec{a}$ بوده و برعکس هر بردار $\vec{b}$ موازی $\vec{a}$ را میتوان بدین صورت نوشت. زیرا کافی است که k را مساوی نسبت $\vec{b}$ به $\vec{a}$ بگیریم و بخصوص چنانکه محوری با برداریکه $\vec{u}$ فرض کنیم این بستگی را خواهیم داشت

بردار موازی محور و با اندازه $k = k\vec{u}$

و بالاخره چنانکه بردار $\vec{a}$ و اعداد k و k' را داشته باشیم بستگی زیر را خواهیم داشت : $k'.(k.\vec{a}) = (k'k)\vec{a}$

برای اثبات آن بردارهای $\vec{b} = k.\vec{a}$ و $\vec{c} = k'.\vec{b} = k'.(k.\vec{a})$ موازی $\vec{a}$ را درنظر میگیریم. بردار $\vec{b}$ را بردار یکه انتخاب کرده اندازه های $\vec{a}$ و $\vec{c}$ بترتیب $\frac{1}{k}$ و k' بوده و از آنجا نسبت $\vec{c}$ به $\vec{a}$ مساوی خارج قسمت این اندازه‌هایعنی : $k'.k = \frac{1}{k} : k'$ میباشد. پس از آنجا : $\vec{c} = (k.k')\vec{a}$ میشود

از این رابطه نتیجه میشود که خارج قسمت بردار $\vec{a}$ بر عدد k مساوی حاصل ضرب $\vec{a}$ در عکس k خواهد شد. $\vec{b} = \frac{1}{k}.\vec{a}$

جمع هندسی

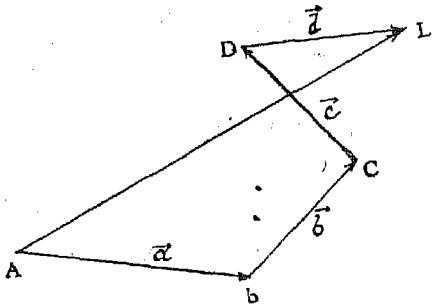
۷ ـ تعریف ـ حاصل جمع هندسی چند بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ .... برداریست که بترتیب زیر بدست میآید :

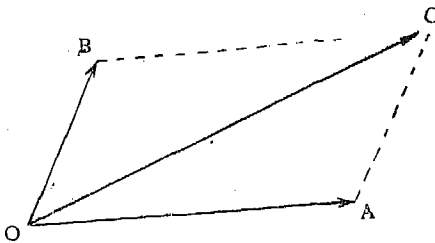
ازنقطه A بردار $\overrightarrow{AB}$ را همسنك $\vec{a}$ وازنقطه B بردار $\overrightarrow{BC}$ را همسنك $\vec{b}$ و از نقطه C بردار $\overrightarrow{CD}$ را همسنك $\vec{c}$ و همینطور تا آخرین بردار رسم کرده و چنانکه L انجام آخرین بردار باشد $\overrightarrow{AL}$ را حاصل جمع هندسی این بردار ها نامند.

در مورد دو بردار میتوان از همان مبداء O دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را

همسنك آنها رسم کرد حاصل جمع $\overrightarrow{OC}$ قطر متوازی الاضلاع O A C B میباشد.

حاصل جمع هندسی با همان علامت + نمایش داده شده زیرا دارای همان خواص حاصل جمع اعداد میباشد.

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \quad \text{و} \quad \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

خواص بالاازروی شکل واضح میباشند زیرا در اولی میتوان در متوازی الاضلاع جای هر یك از بردارها را عوض نمود و دردومی میتوان بعوض دوره کثیر الاضلاع B C D بردار $\overrightarrow{BD}$ را در طرف اول و بردار $\overrightarrow{AC}$ را بجای دوره A B C در طرف دوم قرار داد.

ش ۳

ازتساوی های فوق نتیجه میشود که در جمع هندسی یك عده بردار میتوان جای هر بردار را عوض نموده و همچنین مجموع چند بردار را میتوان بجای آنها قرارداد بدون آنکه درنتیجه تغییری حاصل شود.

ش ٤

قدر مطلق هر حاصل جمع هندسی منتها مساوی مجموع قدر مطلق های بردار ها است. $|\vec{a}+\vec{b} \cdots\cdots| \leqslant |\vec{a}|+|\vec{b}|+\cdots\cdots$

این رابطه نیزازروی شکل واضح بوده زیرا طول A L منتها مساوی مجموع طولهای اضلاع $AB+BC+\cdots\cdots$ میباشد.

تساوی مجموع قدر مطلقها فقط موقعی است که بردارها موازی وهم سو باشند

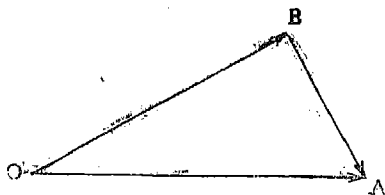
۸ - بردار متقابل - بردار متقابل $\overrightarrow{AB}$ هر بردار همسنك $\overrightarrow{BA}$ است. واين تنها برداری است که با $\overrightarrow{AB}$ جمع شده و حاصل صفر میشود.

$(۱)\quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0$ اين بردار را میتوان همچنين حاصل ضرب $\overrightarrow{AB}$ در (-۱) دانست و ازاين جهت آنرا بصورت $-\overrightarrow{AB}$ يا $-\overrightarrow{a}$ نمايش ميدهند.

۹ - تفاضل هندسی - تفاضل هندسی $\overrightarrow{b}$ از $\overrightarrow{a}$ برداريست مثل x بطوريكه $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{a}$ باشد.

اين بردار مساوی حاصل جمع $\overrightarrow{a}$ و بردار متقابل $\overrightarrow{b}$ بوده يعنی: $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{b})$ و محض اختصار بصورت $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ مینويسيم.

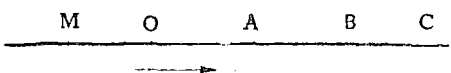
چنانکه از نقطه O بردار های $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را همسنك $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ رسم کنيم تفاضل $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$ برداری همسنك $\overrightarrow{BA}$ خواهد بود.

ش ٥

از آنجا نتيجه ميشود که شرط لازم و کافی برای آنکه دوبردارهمسنك باشند آنست که تفاضل آنها برداری مساوی صفر باشد.

در يك تساوی میتوان برداری را ازيك طرف بطرف ديگر برد بشرط آنکه علامت آنرا تغيير دهند.

۱۰ - قضيه شال - چنانکه بردارهائی موازی محوری باشند حاصل جمع آنها موازی آن محور بوده وبعلاوه بين اندازه هایآنها رابطه زير که بقضيه شالمعروف است برقرار ميباشد

اندازه مجموع هندسی بردار هائی موازی يك محور مساوی مجموع جبری اندازه های هر يك از بردار هاست.

چنانچه بردار ها را طبق آنچه که درمورد حاصل جمع گفته شد دراين حال يکی را پس از ديگری قرار دهيم رابطه زير را خواهيم داشت.

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots+\overline{KL}=\overline{AL} \qquad (۲)$$

درمورد دو بردار همسو یعنی موقعیکه B بین A و C باشد قضیه واضح بوده و بستگی $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ را خواهیم داشت .

حالات دیگر دو بردار بحالت فوق برگشته و برای اثبات حالت کلی فرض میکنیم که قضیه برای $n-1$ بردار صادق بوده آنرا برای n بردار ثابت میکنیم یعنی رابطه : $\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots+\overline{HK}=\overline{AK}$ (۳) را ثابت دانسته میخواهیم رابطه : $\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots+\overline{HK}+\overline{KL}=\overline{AL}$ (٤) را ثابت کنیم برای اینکار بستگی (۳) را از (٤) کم نموده خواهیم داشت :

$$\overline{AL}=\overline{AK}+\overline{KL} \quad \text{و یا} \quad \overline{KL}=\overline{AL}-\overline{AK}$$

پس فرمول (۲) کلی بوده و میتوان آنرا بصورت زیر نیز نوشت

M O A B C

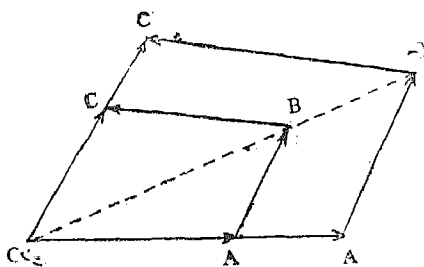
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots+\overline{KL}+\overline{LA}=0$$

ش ٦

۱۱ - تساویهای هندسی جبری - اگر اعداد x و y ... و بردار های $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ ... را داشته باشیم میتوانیم بستگی های زیر را بنویسیم :

$$(٥) \qquad x(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\cdots)=x\overrightarrow{a}+x\overrightarrow{b}+\cdots$$

$$(٦) \qquad (x+y+\cdots)\overrightarrow{a}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{a}+\cdots$$

بستگی (٥) نتیجه میشود از اینکه برای گرفتن متجانس مجموع هندسی : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ بنسبت x میتوان متجانس هریك از بردارها را بهمان نسبت گرفت این موضوع از روی شکل و همچنین از خاصیت تجانس واضح میباشد .

ش ۷

بستگی (٦) از قضیه شال ثابت

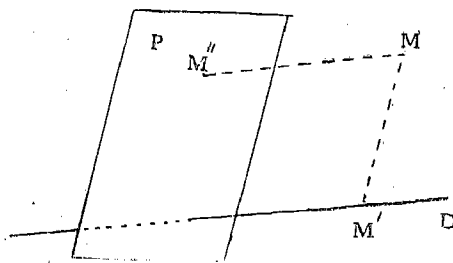
شده زیرا بردار های طرف دوم بستگی موازی بوده و چنانکه $\vec{a}$ را بردار یکه بگیریم اندازه های آنها بترتیب x، y، ... میباشند .

پس اندازه مجموع آنها $x + y + \dots$ خواهد شد .

تصاویر

۱۴ ـ تعریف ـ خط D وصفحه P که موازی نیستند مفروضند. تصویر نقطه M از فضا روی خط D بموازات صفحه P نقطه M' محل برخورد خط مزبور با صفحهٔ موازی P که از M مرور نماید میباشد . و بهمین ترتیب تصویر M روی P محل برخورد صفحه P با خطی موازی D که از M مرور نماید خواهد بود .

تصویر یك بردار برداریست که آغاز و انجام آن تصاویر آغاز وانجام بردار اول باشند .

خواص زیر راجع بتصاویر واضح میباشند .

۱ ـ تصاویر دو بردار همسنك روی یك خط یا صفحه و یا روی خطوط وصفحات موازی بردارهای همسنك اند .

۲ ـ تصویر مجموع هندسی چند بردار مجموع هندسی تصاویر است .

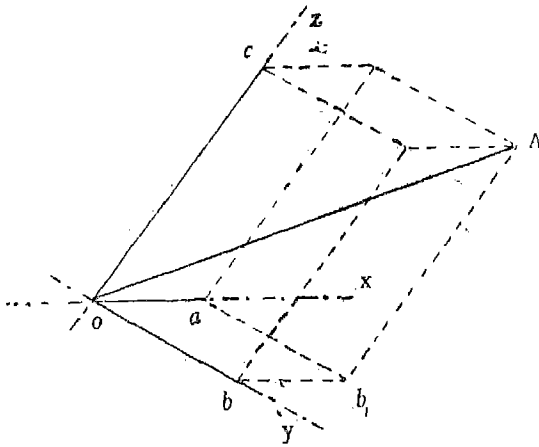
P M'' M M' D

ش ۸

۳ ـ هر بردار مجموع هندسی تصاویرش روی سه محور ox و oy oz که تشکیل یك سه وجهی را بدهند میباشد . تصویر روی ox بموازات صفحه $zoyz$ روی oy بموازات صفحه ozx و روی oz بموازات صفحه oxy خواهد بود . در این حالت تصاویر را مولفه های بردار نامند .

در موردیکه خط و صفحه برهم عمود باشند تصاویر را قائم گویند .

۱۴ ـ مختصات و یا تصاویر یك بردار ــ چنانکه از یك نقطه o سه

ش ۹

محور ox و oy و oz که روی آنها بردارهای یکه انتخاب شده باشند مرور دهیم هر بردار مجموع هندسی مولفه هایش بوده و میتوان هر بردار را توسط این سه مقدار کاملا مشخص نمود و محاسبات روی این اعداد را بعوض محاسبات روی آن بردار انجام داد .

چنانکه $\vec{a}$ برداری با مولفه های X و Y و Z باشد بستگی زیر را خواهیم داشت .

$\vec{a} =$ برداری باندازهٔ X روی ox +

برداری باندازهٔ Y روی oy +

برداری باندازهٔ Z روی oz

اعداد X ، Y ، Z مختصات بردار $\vec{a}$ نامیده میشوند .

بهر بردار $\vec{a}$ در فضا سه عدد X ، Y ، Z مربوط بوده و بالعکس هر دستگاه سه عددی یك بردار $\vec{a}$ را درفضا با تقریب یك همسنگی مشخص میکنند .

چنانکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردار های یکه محور های ox ، oy ، oz باشند بردار بطول X روی ox را بصورت $X\ \vec{i}$ وهمچنین دوبرداردیگرروی دومحوررا بصورت $Y\ \vec{j}$ و $Z\ \vec{k}$ نمایش داده پس از آنجا خواهیم داشت :

$$\vec{a} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$$

چنانکه می بینیم نمایش یك بردار توسط سه عدد بستگی بدستگاه محور ها

داشته در صورتیکه در محاسبات برداری عملیات و روابط نسبت بدستگاه محورها مستقل میباشند .

۱۴ - عملیات در روی تصاویر - دوبرداروتصاویرآنها را روی سه محور ox و oy و oz بابردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$

فرض میکنیم : $\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

$$\vec{a'} = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}$$

شرایط همسنك بودن این دو بردار : $X = X' \quad Y = Y' \quad Z = Z'$

وشرایط موازی بودن آنها : $\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'}$ میباشند .

مولفه های حاصل ضرب $m\vec{a}$: mX و mY و mZ

ومولفه های مجموع $\vec{a} + \vec{a'}$: $X + X'$ و $Y + Y'$ و $Z + Z'$ خواهند بود .

اثبات - درمورد حاصل جمع کافی است که $\vec{a}$ و $\vec{a'}$ را با هم جمع نموده و از $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ فاکتور بگیریم :

$$\vec{a} + \vec{a'} = (X + X')\vec{i} + (Y + Y')\vec{j} + (Z + Z')\vec{k}$$

در مورد حاصل ضرب در عدد m بهمین ترتیب از بستگی (۵) استفاده کرده وچنین خواهیم داشت :

$$m\vec{a} = m(X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) = (mX)\vec{i} + (mY)\vec{j} + (mZ)\vec{k}$$

وبخصوص تصاویر بردار متقابل یك بردار همان تصاویر باعلامت — میباشند

از آنجا تصاویر تفاضل دوبردار : $X - X'$ و $Y - Y'$ و $Z - Z'$

ودرنتیجه شرایط همسنگی که عبارت ازصفربودن این تصاویرند بدستمیآیند

درمورد موازی بودن دوبردار لازم وکافی است که : $\vec{a} = m\vec{a'}$ بوده و از آنجا شرایط بالا بدست خواهند آمد .

۱۵ - سوی سه وجهی - دراغلب موارد محور های مختصات را قائم و واحد را روی آنها یکی اختیارمیکنیم ولی بعضی‌اوقات لازمست که جهت محورها را نسبت

بهم نیز بررسی نمائیم.

گوئیم دو سه وجهی قائم $Oxyz$ و $O'x'y'z'$ که یالهای آنها بترتیب معینی قرار گرفته اند دارای یك سو میباشند چنانکه بتوان با یك انتقال یکی را بردیگری منطبق نمود. این انطباق باید طوری باشد که یالهای هم اسم روی هم واقع شوند.

از این تعریف قانون زیر نتیجه میشود:

دو سه وجهی دارای یك سو یا سوهای مخالفند بر حسب آنکه بینندهٔ که پی در پی روی دو یال مربوط Oz و $O'z'$ بایستد بطریقیکه جهت این اسه ها از پا بسمت سر قرار گیرد وجه های Oxz و Oyz و $O'x'z'$ و $O'y'z'$ را دریك سمت یا در سمتهای مخالف هم ببیند و یا برحسب آنکه درصفحات Oxy و $O'x'y'$ زوایای مربوطه (Ox و Oy) و ($O'x'$ و $O'y'$) دارای یك سو و یا با سوهای مخالف باشند.

سوی چرخش درحول هرمحور مثل IZ را میتوان با سوی سه وجهی مقایسه کرد بدین ترتیب که اگر بیننده در روی این محور طوری بایستد که جهت محور از پا بسمت سر قرار گرفته و نیز چون ازداخل سه وجهی زوایای آنرا نگاه کند چنانکه سوی دورانرا همان سوی زوایای (Ox و Oy) ویا (Oy و Oz) ویا (Oz و Ox) بیند آن دو را همسو وگرنه با سوهای مخالف هم نامند.

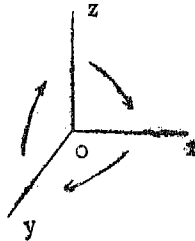
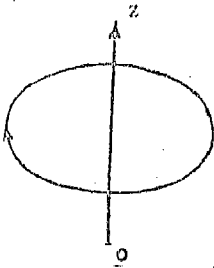
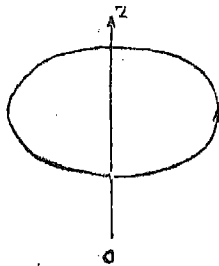
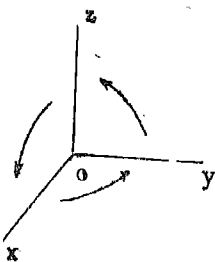
وبالاخره میتوان هرسه وجهی را با سه وجهی قائمی مقایسه کرد بدین ترتیب که آنها را همسو یا با سو های مخالف نامند بر حسب آنکه بینندهٔ که پی در پی زوایای دو سه وجهی غیر مشخص $O'pqr$ و قائم $Oxyz$ را از داخل آنها نگاه کند سوی زوایای (Ox و Oy) و (Oy و Oz) و (Oz و Ox) را همان سوی زوایای ($O'p$ و $O'q$) و ($O'q$ و $O'r$) و ($O'r$ و $O'p$) ویا مطابق سوی مخالف آنها ببیند.

۱۶ – فضای راستا دار – برای مقایسه دو سه وجهی T و U نسبت بهم میتوان آنها را نسبت بیك سه وجهی سوم I مقایسه کرد. چنانکه T و U همسوی سه وجهی I ویا آنکه هردوبا سوی مخالف I باشند نسبت بهم همسو خواهندبود

و همچنین است در مورد دوران درحول یك محور .

چنانکه یك سه وجهی I در فضا انتخاب کرده باشند بطوریکه نسبت بآن تمام سه وجهی های دیگر را مقایسه کنند گویند که فضا را راستا دار کرده اند .

در یك فضای راستا دار هر سه وجهی را که همسوی سه وجهی مقایسه I باشد مستقیم یا مثبت و گرنه معکوس یا منفی گویند و همچنین است برای چرخش در حول یك محور .

در اغلب کتابهای هندسه ومکانیك سه وجهی مقایسه را طوری انتخاب میکنند که برای بینندهٔ که روی محور z o قرار گیرد محور x o در سمت چپ ومحور oy طرف راست او باشد و یا آنکه دوران در صفحه از چپ براست ویاسوی عقربه های ساعت باشد .

درنجوم و فیزیك معمولا سوی عکس سوی مزبور را انتخاب میکنند یعنی از راست بچپ این سو سوی دوران زمین نسبت بمحوری که از جنوب بشمال ممتد است میباشد .

ش ۱۰

حاصل ضرب داخلی یا اسکالر دوبردار

۱۷ ـ تعریف ـ حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ در $\vec{b}$ عددی مساوی حاصل ضرب اندازه های آنها در جیب تمام زاویه دو محوریکه حامل آنها هستند میباشد :

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cos (x' x \text{ و } y' y)$$

علامت حاصل ضرب داخلی همان علامت حاصل ضرب معمولی میباشد .

طبق این تعریف مقدار حاصل ضرب داخلی بستگی بسوی مثبتی که روی حامل بردار ها انتخاب کرده ایم ندارد زیرا چنانکه سوی $x\,x'$ را بجای $x\,x'$ مثلا بگیریم اندازهٔ $\vec{a}$ تغییر علامت داده ولی همچنین حبیب تمام زاویه هم چون یك π برزاویه افزوده شده است تغییر علامت خواهد داد .

میدانیم که حاصل ضرب $\overline{a}$ در cos زاویه مساوی تصویر $\vec{a}$ روی $y\,y'$ بوده و همچنین است برای $\vec{b}$ پس از آنجا میتوان حاصل ضرب داخلی را بیکی ازدوصورت $\overline{a} \times$ تصویر b روی $\overline{x'\,x}$ ویا $\overline{b} \times$ تصویر a روی $\overline{y\,y'}$ نوشت .

چنانکه سوی $x'\,x$ و $y'\,y$ را سوی بردار ها انتخاب کنیم اندازهٔ آنها اعداد مثبتی مساوی قدرمطلقشان شده ودرنتیجه زاویه ($y'\,y$ و $x'\,x$) همان زاویه بردارها ($\vec{a}$ و $\vec{b}$) بوده وازآنجا میتوان گفت که حاصل ضرب داخلی دوبردار مساوی حاصل ضرب قدر مطلقشان درجیب تمام زاویه بینشان یعنی :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot cos\,(\vec{a}\ و\ \vec{b})$$ میباشد .

ازعبارت فوق نتیجه میشود که حاصل ضرب داخلی دوبردار مثبت ، صفر ویا منفی است برحسب آنکه زاویه بین دو بردار حاده قائمه ویا منفرجه باشد .

۱۸ ـ خواص حاصل ضرب داخلی ـ توسط بستگی های زیر که در آنها x و y اعداد و $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردار میباشند خلاصه میشوند :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a} \qquad (۷)$$

$$(x \cdot \vec{a}) \times (y \cdot \vec{b}) = (x\,y) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \qquad (۸)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \qquad (۹)$$

همچنین میتوان این بستگی ها را بصورت کلی تر زیر نوشت :

$$(x \cdot \vec{a} + y\,\vec{b} + \dots) \times (x' \cdot \vec{a'} + y'\,\vec{b'} + \dots) = \qquad (۱۰)$$

$$x\,x'(\vec{a} \times \vec{a'}) + x\,y'(\vec{a} \times \vec{b'}) + y\,x'(\vec{b} \times \vec{a'}) + \dots$$

علامات $+$ و $\times$ در این روابط واضح و لازم به توضیح نمیباشند

اثبات - بستگی (۷) طبق تعریف حاصل ضرب روشن میباشد درمورد بستگی (۸) باید متوجه بود که اندازهٔ $x \cdot \vec{a}$ مساوی $x\overline{a}$ بوده وطبق تعریف حاصلضرب داخلی خواهدشد $(x \cdot \vec{a}) \cdot (y \cdot \vec{b}) = (x \cdot \overline{a}) \cdot (y\overline{b}) \cdot \cos\alpha = xy(\overline{a} \cdot \overline{b}\cos\alpha)$

و بالاخره برای اثبات بستگی (۹) میدانیم که طرف اول معادله حاصل ضرب اندازهٔ $\vec{a}$ روی xx' در تصویر $\vec{b} + \vec{c}$ روی همین محور میباشد ولی این تصویر مساوی مجموع تصاویر و اندازهٔ آن مساوی مجموع اندازه های آنها است پس :

$$\overline{a} \cdot \overline{\text{تصویر}\,(b+c)} = \overline{a} \cdot (\overline{\text{تصویر}\,b} + \overline{\text{تصویر}\,c}) = \overline{a}\;\overline{\text{تصویر}\,b} + \overline{a}\;\overline{\text{تصویر}\,c}$$

۱۹ - حالات مخصوص - خواص زیر طبق تعریف واضح بوده و درموارد بسیاری بکار میروند .

شرط لازم وکافی برای آنکه حاصل ضرب داخلیٔ دوبردار صفر باشدآنستکه یکی از بردارها صفر بوده ویا آنکه دوبردار برهم عمود باشند .

حاصل ضرب داخلی یك بردار در خودش مساوی مجذور قدر مطلقش و یا مساوی مجذور اندازه اش میباشد . $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = (\overline{a})^2$

۲۰ - حاصلضرب داخلی برحسب تصاویر - سه محورقائم Ox و Oy و Oz و بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ با طولهای مساوی روی آنها گرفته نتایج زیر را برای حاصل ضربهای این بردارها خواهیم داشت .

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = ۱$$
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = ۰$$

در نتیجه چنانکه دوبردار $\vec{a}$ و $\vec{a'}$ با تصاویر (Z و Y و X) و (Z' و Y' و X') فرض کنیم وچنانکه آنهارا طبق دستور (۱۰) درهم ضرب نمائیم چنین خواهیم‌داشت

$$\vec{a} \cdot \vec{a'} = (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}) \cdot (X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}) = X \cdot X' + Y \cdot Y' + Z \cdot Z'$$

و بخصوص مجذور یك بردار مساوی مجموع مجذورات مولفه هایش میباشد

$$(\vec{a})^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

همچنین میتوان گفت که اندازهٔ تصویر قائم یک بردار $\vec{a}$ روی محوری مساوی حاصل ضرب داخلی این بردار در بردار یکه محور میباشد.

و بخصوص تصاویر X و Y و Z بردار $\vec{a}$ روی محور های مختصات بترتیب مساوی $X = \vec{a} \cdot \vec{i}$ و $Y = \vec{a} \cdot \vec{j}$ و $Z = \vec{a} \cdot \vec{k}$ خواهند شد.

۳۱ ـ موارد استعمال ـ درمثلث A B C که اضلاع آنرا بترتیب a و b و c میگیریم بستگی برداری $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$ را میتوان نوشت.

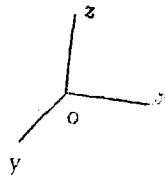
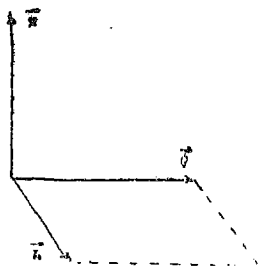
وچنانکه آنرا مجذور کنیم: $(\vec{AB})^2 = (\vec{CB})^2 + (\vec{CA})^2 - 2\,\vec{CB} \cdot \vec{CA}$

مقادیر $(\vec{AB})^2$ و $(\vec{CB})^2$ و $(\vec{CA})^2$ بترتیب مساوی c^2 و a^2 و b^2 بوده و برای محاسبه $\vec{CB} \cdot \vec{CA}$ سوی مثبت را سوی همین بردارها انتخاب کرده ودرنتیجه اندازهٔ آنها b و a خواهند شد. پس از آنجا بستگی مثلثاتی زیر را خواهیم داشت

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{c}$$

همچنین میتوان دستور های مثلثات مسطحه و کروی را از راه حاصل ضرب داخلی بدست آورد.

حاصل ضرب خارجی یا برداری

۳۲ ـ تعریف ـ چنانکه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در فضای راستا داری داده شده باشند حاصلضرب خارجی یابرداری آنها بردار $\vec{n}$ است که باسه شرط زیر تعیین شود

۱ ـ امتداد آن عمود بصفحه بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

۲ ـ سوی آن طوری است که سه وجهی $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n})$ مستقیم یعنی هم سوی سه وجهی مقایسه باشد.

ش ۱۱

۳ ـ قدر مطلق آن مساوی سطح متوازی الاضلاعی است که از دو بردار فوق تشکیل شود.

چنانکه دو بردار موازی باشند بنا بر تعریف حاصلضرب آنها صفر است.

میدانیم که اندازه سطح متوازی الاضلاع مساوی حاصل ضرب قدر مطلقهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است در قدر مطلق جیب زاویه بینشان.

حاصل ضرب خارجی را با علامت $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ نمایش میدهیم.

۲۳ ـ خواص حاصل ضرب خارجی ـــ خواص حاصل ضرب برداری با فرمولهای زیر خلاصه میشوند:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a}) \qquad (11)$$

$$(x \cdot \vec{a}) \wedge (y \cdot \vec{b}) = xy(\vec{a} \wedge \vec{b}) \qquad (12)$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \qquad (13)$$

و یا بطور کلی:

$$(x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + \dots) \wedge (x' \vec{a'} + y' \vec{b'} + \dots) = xx'(\vec{a} \wedge \vec{a'}) + xy'(\vec{a} \wedge \vec{b'}) + yx'(\vec{b} \wedge \vec{a'}) + \dots yy'(\vec{b} \wedge \vec{b'}) + \dots \qquad (14)$$

در یک چنین حاصل ضرب باید مکان هر عامل را حفظ کرد.

و بالاخره برای آنکه حاصل ضرب خارجی دو بردار صفر باشد لازم و کافی است که یکی از عوامل صفر و یا آنکه دو بردار موازی باشند.

چنانکه: $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ باشد

خواه $\vec{a} = 0$ ویا $\vec{b} = 0$ ویا $\vec{a} = n \cdot \vec{b}$ است

۲۴ ـ اثبات ـ در بستگی (۱۱) امتداد بردار حاصل ضرب و همچنین قدر مطلق آن در دو طرف با هم مساوی ولی سوی بردارها باهم مخالفند.

بستگی (۱۲) ازحیث قدر مطلق واضح بوده زیرا چنانکه اضلاع یك متوازی الاضلاع را بترتیب در x و y ضرب نمائیم قدر مطلق سطح آن در xy ضرب میشود

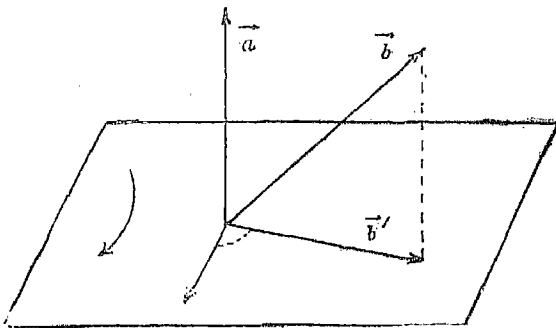
امتداد حاصل ضرب هم نیز تغییر نمیکند وفقط سوی آنرا باید بررسی نمود و چون درحالات مختلف این بررسی را بنمائیم خواهیم دید که دو بردار همسو میباشند.

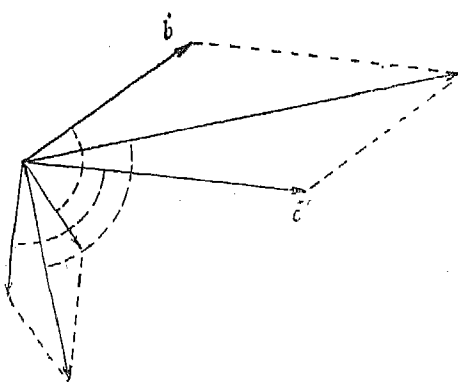
برای اثبات بستگی (۱۳) از قضیه زیر استفاده میکنیم:

قضیه ـ حاصل ضرب خارجی بردار $\vec{a}$ در بردار $\vec{b}$ مساوی حاصل ضرب خارجی $\vec{a}$ در تصویر قائم $\vec{b}$ روی صفحه عمود به $\vec{a}$ میباشد.

$\vec{b'}$ را تصویر $\vec{b}$ روی صفحهٔ (A) عمود به $\vec{a}$ فرض کرده بستگی:

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{b'}$ را ثابت میکنیم.

صفحه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود به (A) بوده و شامل $\vec{b'}$ میباشد. در نتیجه دو حاصل ضرب $\vec{a} \wedge \vec{b}$ و $\vec{a} \wedge \vec{b'}$ دارای یکنا امتداد مشترك و یك قدر مطلق میباشند. و همچنین سوی آنها یکی میباشد زیرا بینندهٔ که روی یکی از آنها قرار گیرد زوایای: $(\vec{a}, \vec{b})$ و $(\vec{a}, \vec{b'})$ را همسو میبینند. از طرفی میتوان حاصلضرب $\vec{a} \wedge \vec{b'}$ رابا اینطریق بدست آورد:

درصفحه (A) بردار $\vec{b'}$ را باندازهٔ یك قائمه در جهت مثبت دوران داده و بعد اندازه آنرا در $|\vec{a}|$ ضرب نمائیم.

ش ۱۲

ش ۱۳

حال برای اثبات بستگی (۱۳) b و c را روی صفحهٔ عمود به $\vec{a}$ تصویر نموده تصویر حاصل جمع $\vec{c}+\vec{b}$ بردار $\vec{b'}+\vec{c'}$ خواهد شد . و بر حسب آنچه گفتیم خواهیم داشت

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{a}\wedge\vec{b'} \qquad \vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{c'}$$

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\wedge(\vec{b'}+\vec{c'})$$

حال برای بدست آوردن حاصل ضربهای طرف دوم کافی است که $\vec{b'}$ و $\vec{c'}$ و $\vec{b'}+\vec{c'}$ را بیك زاویه قائمه دوران داده و بعد آنها را ضرب در قدر مطلق $\vec{a}$ بنمائیم ولی قبل ازدوران ($\vec{b'}+\vec{c'}$) قطر متوازی الاضلاع بوده وپس از دوران و ضرب نمودن آن در مقدار معینی بازهم قطر متوازی الاضلاع دیگری که اضلاع آن بترتیب ($\vec{a}\wedge\vec{b'}$) و ($\vec{a}\wedge\vec{c'}$) هستند خواهد شد وچون پس ازاینعمل مساوی با ($\vec{b'}+\vec{c'}$) $\vec{a}\wedge$ میشود از آنجا :

$$\vec{a}\wedge(\vec{b'}+\vec{c'})=\vec{a}\wedge\vec{b'}+\vec{a}\wedge\vec{c'}$$

و در نتیجه بستگی (۱۳) ثابت میگردد .

۲۵ ـ تصاویر حاصل ضرب برداری ـ چنانکه سه وجهی قائم $oxyz$ و بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ را روی محور های آن بگیریم بستگی های :

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=0 \qquad \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$$

$$\vec{j}\wedge\vec{j}=0 \qquad \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$$

$$\vec{k}\wedge\vec{k}=0 \qquad \vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$$

بین بردار های یکه بر قرار میباشند .

چنانکه تصاویر $\vec{a}$ و $\vec{a'}$ را X ، Y ، Z و X' ، Y' ، Z' فرض کنیم پس از استفاده از فرمول (١٤) خواهیم داشت :

$$\vec{a}\wedge\vec{a'}=(X.\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k})\wedge(X'.\vec{i}+Y'\vec{j}+Z'\vec{k})$$
$$=(YZ'-ZY')\cdot\vec{i}+(ZX'-XZ')\cdot\vec{j}+(XY'-YX').\vec{k}$$

پرانتزهای طرف‌دوم بستگی تصاویر حاصل‌ضرب روی محورها بوده وچنانکه

دیده میشود خواص حاصل ضرب خارجی از روی تصاویر آن نیز واضح میباشند.

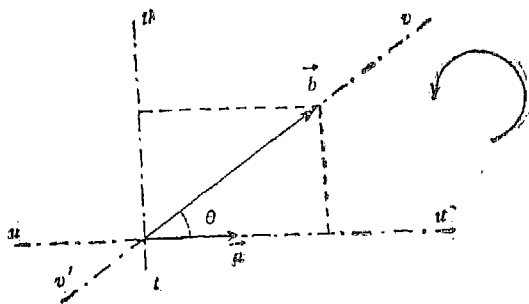
۳۶ - بردار در صفحه راستا دار - صفحه راستا دار صفحه ایست که در آن سوی دوران زوایا معین شده باشد. یك چنین صفحه فضا را بدو ناحیه مثبت و منفی تقسیم میکند ناحیه مثبت ناحیه ایست که در آن جهت چرخش صفحه مثبت و ناحیه دیگر منفی میباشد.

بردار یکه $\vec{k}$ راکه عمود برصفحه است عمود مستقیم برصفحه نامند چنانکه امتداد آن در ناحیه مثبت صفحه باشد.

دو محور Ix و Iy واقع در صفحه را عمود مستقیم بهم گویند چنانچه زاویه (Ix و Iy) مساوی $+\frac{\pi}{2}$ باشد.

چنانکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بردارهای یکه این محورها باشند سه وجهی ($\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$) قائم و مستقیم بوده وروابط : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ $\quad \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i}$ را بین آنها خواهیم داشت

چنانکه دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را در این صفحه فرض کنیم حاصل ضرب خارجی آنها عمود به صفحه در امتداد $\vec{k}$ بوده و اندازه آن روی محور oz با بردار یکه $\vec{k}$ برحسب تصاویر X ، Y و X' ، Y' آن دو بردار نسبت بدو محور ox و oy واقع در صفحه چنین خواهد شد $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = X \cdot Y' - Y X'$ اندازه

ش ۱۴

وچون زاویه بین دو بردار را θ فرض کنیم چنین خواهیم داشت :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \text{ اندازهٔ } = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \sin \theta \cdot$$

چنانکه صفحه راستا دار نباشد فقط قدرمطلق حاصل ضرب را میتوان داشت.

۳۷ - بستگی لاگرانژ - برای پیدا کردن این بستگی ازراه برداری مجذور

حاصل ضرب خارجی دو بردار را حساب میکنیم :

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})^2 = \overline{a}^2 . \overline{b}^2 . \sin^2\theta = \overline{a}^2 . \overline{b}^2 - (\overline{a}.\overline{b}.\cos\theta)^2$$

ولی داخل پرانتز طرف دوم معادله حاصل ضرب داخلی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بیش نیست . بطوریکه معـادله بصورت $(\vec{a}\wedge\vec{b})^2 = (\vec{a})^2 . (\vec{b})^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$ نوشته میشود . چنانکه تصاویر بردار ها را بترتیب (Z و Y و X) و (Z' و Y' و X') بگیریم معادله بصورت زیر که به بستگی لاگرانژ موسوم است در میآید .

$$(YZ' - ZY')^2 + (ZX' - XZ')^2 + (XY' - YX')^2$$
$$= (X^2 + Y^2 + Z^2)(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) - (XX' + YY' + ZZ')^2$$

۲۸ ـ حاصل ضرب مختلط ـ حاصلضرب مختلط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مقدار $\vec{a}(\vec{b}\wedge\vec{c})$ میباشد . این حاصل ضرب یك اسکالر بوده و مقدار آن برحسب تصاویر بردارهاکه بترتیب برای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مقادیر (Z و Y و X) و (Z' و Y' و X') و (Z'' و Y'' و X'') بگیریم چنین میشود :

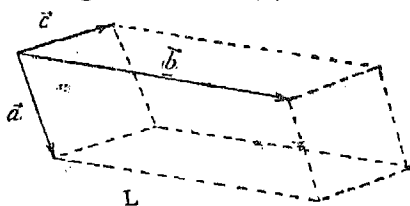
تصاویر $\vec{b}\wedge\vec{c}$

$$Y'Z'' - Z'Y''$$
$$Z'X'' - X'Z''$$
$$X'Y'' - Y'X''$$

و در نتیجه :

$$\vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c}) = X.(Y'Z'' - Z'Y'') + Y(Z'X'' - X'Z'') + Z(X'Y'' - Y'X'')$$

چنانکه می بینیم طرف دوم بستگی بسط دترمینان $\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}$ میباشد .

از طرفی حاصل ضرب مختلط نمایش حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار ساخته شده باشد نیز میدهد زیرا قدر مطلق $\vec{b}\wedge\vec{c}$ مساوی سطح متوازی ـ الاضلاعی که روی دو بردارساخته میشود بوده و در نتیجه حاصل ضرب مختلط نمایش حاصل ضرب این سطح در تصویر $\vec{a}$ روی $\vec{b}\wedge\vec{c}$

ش ۱۵

یعنی تصویر $\vec{a}$ روی عمود بصفحه $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را میدهد. علامت این حجم + یا — است بر حسب آنکه این سه بردار تشکیل یك سه وجهی مستقیم یا معکوس را بدهند.

همگنی

۲۹ – دراین قسمت بحث ازاندازهٔ چندیهای هندسی (خط ـ سطح ـ حجم) که با آنها سروکار داریم و بین آنها روابطی مینویسیم مینمائیم. البته انتخاب یك واحد طول که از آن تمام واحد های دیگر نتیجه میشوند لازم خواهد بود. این واحد در محاسبات عددی متر ـ سانتیمتر و یا واحد دیگر و در موضوعات نظری انتخاب آن لازم نبوده ودر همین مورد است که اصل همگنی دخالت مینماید.

میدانیم چنانکه یك چندی‌را متوالیاً بادو واحد مختلف U و 'U اندازه بگیریم چنانکه نسبت $k = \frac{U}{U'}$ باشد اندازه‌های مربوطه m و m' آن چندی به نسبت عکس $\frac{m}{m'} = \frac{1}{k}$ خواهد بود.

حال فرض کنیم که بین اندازه های طولهای مختلف یك شکل رابطهٔ که بستگی بانتخاب واحد نداشته باشد نوشته باشیم.

طبق قضیه بالااین اندازه‌ها با تقریب یك‌ضریب معلوم بوده زیرا چنانکه واحد را تغییر دهیم تمام اندازه ها در یك عدد ضرب میشوند از آنجا نتیجه میشود که چنانکه بستگی $f(a, b, c, \ldots l) = 0$ (۱۵) بین این اندازه ها برقرار باشد این بستگی چنانکه a ، b ، c . . . را در ضریبی ضرب کنیم تغییری نخواهد کرد چنین بستگی را همگن نامیم.

چنانکه موقعی‌تمام مفروضات ازیك نوع نباشند انتخاب یك‌واحد طول‌اجباری بوده ولی چنانچه محاسبه را با مفروضات همگن شروع نموده و در حین عمل بیك معادله غیر همگن بربخوریم مطمئناً اشتباهی رخ داده است.

باید یادآور شد که جهت برآورد درجه همگنی یك سطح از درجه ۲ ، یك

حجم از درجه ۳ و خطوط مثلثاتی و زاویهٔ قوس از درجه صفر میباشند .

در مورد مفروضات غیر همگن همیشه ممکن است رابطهٔ را همگن نمود مثلا معادله (۱۵) را غیر همگن فرض نموده چنانکه واحد را تغییر دهیم و u را اندازهٔ واحد قبلی نسبت بواحد جدید بگیریم اندازه های a ، b ، . . . بصورت : $a' = au$ و $b' = bu$ . . . درآمده در نتیجه رابطه (۱۵) بصورت :

$f\left(\frac{a'}{u}, \frac{b'}{u}, \ldots \frac{l'}{u}\right) = 0$ (۱٦) که نسبت به a' ، b' . . . l' ، u همگن است در میآید .

مشتق هندسی

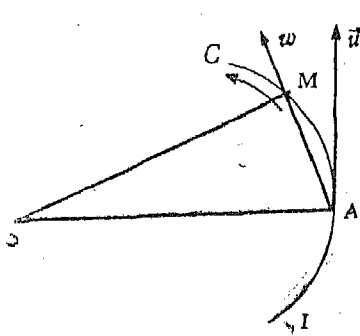
۴۰ ـ مشتق یك بردار ـ گویند بردار $\vec{a}$ که بمتغیر t بستگی دارد در فاصله (t_0, t_1) مشخص میباشد چنانکه بازاء هرمقدار t این فاصله یك بردار $\vec{a}$ از حیث امتداد ، سو و قدر مطلق معلوم باشد . قضایای مربوط بحد و پیوستگی چنین بردار ها نظیر قضایای مربوطه توابع معمولی بوده و البته تصاویر چنین بردار هم توابعی از t میباشند .

چنانکه از نقطه o فضا بردار هائی همسنك هریك از بردار های $\vec{a}(t)$ مرور دهیم با تغییر t انتهای M آنها منحنی در فضا موسوم به هودوگراف یا اندیکاتریس رسم مینماید . این منحنی نمایش تغییرات تابع برداری را داده و برعکس میتوان هر منحنی را نمایش دهنده تغییرات یك تابع برداری دانست .

بردار $\vec{a}(t)$ و t_0 یکی از مقادیر t را فرض نموده حد نسبت :

$\frac{\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)}{t - t_0}$ وقتیکه t بسمت t_0 میل کند (اگر این حدوجود داشته باشد) مشتق بردار $\vec{a}(t)$ بازاء $t = t_0$ نامند .

اگر برداری ثابت باشد مشتق آن صفر و برعکس اگر مشتق هندسی یك بردار همیشه صفر باشد آن بردار ثابت است .

ش ۱۶

چنانکه می‌بینیم تعریف فوق شبیه بتعریف مشتق توابع اسکالر بوده و همان علامت را برای نمایش دادن آن بکار میبریم :

$$\frac{d\vec{a}}{dt} \text{ یا } \vec{a}'_t(t_0)$$

A را نقطه مربوط بمقدار t_0 متغیر روی هودوگراف گرفته و در روی این منحنی مبداء مثلا I وسوئی جهت جنبش روی آن انتخاب میکنیم بطوریکه بازاء هر نقطه منحنی یك عدد که اندازه قوس $\widehat{IM}$ است باعلامت آن داشته باشیم . البته $s = \widehat{IM}$ بستگی بمقدار t داشته و رابطه فوق را میتوان چنین نوشت : $\frac{\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)}{t - t_0} = \frac{\overrightarrow{AM}}{t - t_0}$

امتداد بردار فوق وتر AM بوده و چنانکه روی آن بردار یکه $\vec{w}$ را در جهت قوسهای صعودی هودوگراف بگیریم نسبت فوق بصورت :

$$\frac{\vec{a}(t) - \vec{a}(t_0)}{t - t_0} = \vec{w} \cdot \frac{\overline{AM}}{t - t_0}$$

$$= \vec{w} \cdot \frac{\overline{AM}}{s(t) - s(t_0)} \cdot \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

نوشته میشود . سوی $\vec{w}$ از A بسمت M یا برعکس آنست برحسب آنکه $s(t)$ بزرگتر یا کوچکتر از $s(t_0)$ باشد .

چنانکه t سمت t_0 میل کند M بسمت A میل کرده و چون صورت ومخرج نسبت : $\frac{\overline{AM}}{s(t) - s(t_0)}$ هم علامت اند پس حد آن که حد نسبت وتر بقوس است یك خواهد شد . از طرفی حد بردار $\vec{w}$ بردار $\vec{u}$ بطول یك مماس بر منحنی و سوی آن سوی قوسهای صعودی بوده و حد نسبت $\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ مشتق s نسبت

به t خواهد شد پس مشتق هندسی را میتوان چنین نوشت : $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{u} \cdot \frac{ds}{dt}$

یعنی مشتق هندسی برداریست که امتداد آن مماس بر هودوگراف و سوی آن سوی قوسهای صعودی و اندازه آن $\frac{ds}{dt}$ است .

۳۱ ـ محاسبه مشتق هندسی ـ مشتق هندسی که باین ترتیب تعریف میکنیم نظیر مشتق توابع جبری بازاء یك مقدار t_0 متغیر معین بوده ولی چنانکه این مشتق را بازاء مقادیر مختلف t_0 حساب کنیم میتوان آنرا بنوبه خود تابعی از t دانسته و نسبت باین توابع میتوان مشتقی که مشتق دوم بردار اول نامیده میشود تعریف کرد.

قوانین محاسبه مشتق‌هندسی همان قوانین توابع معمولی‌بوده وآنهارابوسیله دستور های زیر که بجای مشتق علامت دیفرانسیل بکار برده ایم خلاصه کرده ایم :

$$d(\vec{a}+\vec{b}) = d\vec{a} + d\vec{b}$$

$$d(f\cdot\vec{a}) = f\cdot d\vec{a} + df\cdot\vec{a}$$

$$d(\vec{a}\cdot\vec{b}) = d\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot d\vec{b}\cdot$$

$$d(\vec{a}\wedge\vec{b}) = d\vec{a}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge d\vec{b}\cdot$$

اثبات آنها شبیه باثبات دیفرانسیل های توابع معمولی بوده و درمورد حاصل ضرب خارجی باید مرتبه هر عامل را در مشتق حفظ کرد .

۳۲ ـ تصاویر مشتق هندسی ـ چنانکه $\alpha(t)$ را اندازه تصویربردار $\vec{a}(t)$ روی محوری با بردار یکه $\vec{v}$ فرض کنیم خواهیم داشت : $\alpha(t) = \vec{v}\,.\,\vec{a}(t)$

چنانکه مشتقات متوالی از این رابطه بگیریم : $\alpha'_t = \vec{v}\,.\,\vec{a}'_t$

و $\alpha''_{t^2} = \vec{v}\,\vec{a}''_{t^2}$ و . . . خواهند شد و از آنجا نتیجه میشود که : مشتقات متوالی تصویر یك بردار روی یك محور تصاویر مشتقات هندسی آن بردارند .

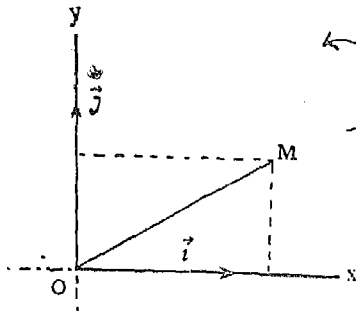
از قضیه فوق نتیجه میشود که چنانچه تصاویر بردار $\vec{a}$ را روی سه محور

با بردار های یکه $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ ، $\vec{k}$ بترتیب X ، Y ، Z بگیریم و همانطورکه سابق گفتیم $\vec{a}$ را بصورت : $\vec{a} = X \cdot \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$ بنویسیم میتوانیم مشتق اول آنرا بصورت : $\vec{a'} = X' \vec{i} + Y' \vec{j} + Z' \vec{k}$ نیز بنویسیم و همچنین است برای مشتقات متوالی آن بردار .

بخش دوم

مختصات

۳۳ ـ مختصات قائم ـ در صفحه راستا دار دو محور قائم Ox ، Oy را که با هم گوشه $+\frac{\pi}{2}$ داشته باشند فرض میکنیم $\vec{i}$ و $\vec{j}$ را بردار های یکه روی آنها گرفته میدانیم که مختصات نقطه M (x , y) تصاویر بردار $\vec{OM}$ بوده و بستگی : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ بین آنها برقرار میباشد .

همچنین میتوان x , y را حاصل ضرب داخلی $\vec{OM}$ در $\vec{i}$ و $\vec{j}$ گرفت :

$x = \vec{OM} \cdot \vec{i}$ و $y = \vec{OM} \cdot \vec{j}$

x را طول و y را عرض وهردورا مختصات کارتزین نقطه M نامند .

ش ۱۷

اگر بردار $\vec{AB}$ توسط بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ ویاآنکه توسط مختصات آغاز وانجامش یعنی $A(a, b)$ و $B(a', b')$ معلوم باشد بستگی های زیر را خواهیم داشت :

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (a' - a)\vec{i} + (b' - b)\vec{j}$$

و از آنجا تصاویر $\vec{AB}$ بترتیب $(a' - a)$ و $(b' - b)$ خواهند بود

دو نقطه M و M' که دارای یك مختصات $x = x'$ و $y = y'$ باشند برهم منطبق بوده ولی برعکس دوبردار که دارای یك تصاویر باشند فقط همسنگ خواهند

بود یعنی نقطه عملشان درصفحه غیر مشخص میباشد .

۳۴ ـ مختصات قائم در فضا ـ سه محور که با هم تشکیل یك سه وجهی قائم را بدهند فرض کرده سوی آنرا سوی مستقیم میگیریم . سه بردار یکه : $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ باطولهای مساوی روی آنها گرفته مختصات نقطه M تصاویر (x, y, z) بردار $\vec{OM}$ خواهند بود بطوریکه بستگی : $\vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ بین آنها برقرار باشد .

همچنین میتوان نوشت : $x = \vec{OM} \cdot \vec{i} \quad y = \vec{OM} \cdot \vec{j} \quad z = \vec{OM} \cdot \vec{k}$

اگر بردار $\vec{AB}$ توسط مختصات آغازش (a, b, c) . و مختصات انجامش (a', b', c') معین باشد بستگی $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ برقرار بوده و از آنجا : تصاویر $\vec{AB}$ بترتیب $(a' - a)$ و $(b' - b)$ و $(c' - c)$ خواهند بود .

۳۵ ـ فاصله دو نقطه در صفحه ـ بردار $\vec{a}$ و تصاویر قائم آن X و Y را فرض کرده میدانیم که مجذور طول آن مساوی حاصل ضرب داخلی آن درخودش میشود :

$$l^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a})^2 = X^2 + Y^2$$

از آنجا نتیجه میشود که چنانچه بردار $\vec{AB}$ توسط مختصات آغازش $A(a, b)$ و انجامش $B(a', b')$ معلوم باشد مجذور فاصله دو نقطه A و B

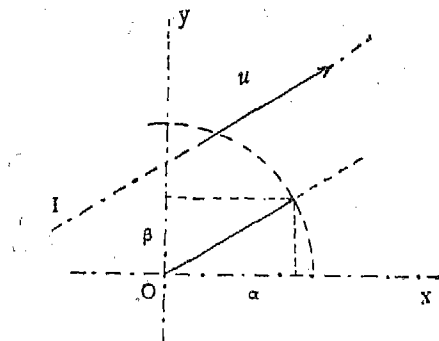
$$\overline{AB}^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (a' - a)^2 + (b' - b)^2 .$$ خواهد شد

۳۶ ـ فاصله دو نقطه در فضا ـ بهمین ترتیب دیده میشود که مجذور طول یك بردار در فضا :

$$l^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = X^2 + Y^2 + Z^2$$

و فاصله دو نقطه A و B :

$$\overline{AB}^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2$$ خواهدشد

۳۷ ـ تعیین یك نیم خط یا خط راستا دار ـ برای تعیین امتداد یك نیم‌خط یاخطراستا دار I معمولا تصاویر (α, β) یك بردار یکه $\vec{u}$ واقع روی آنرا تعیین مینمایند . این تصاویر را کوسینوس های هادی یاپارامتر های هادی اصلی مینامند .

خواص زیر جهت این تصاویر روشن می باشند.

۱ - شرط لازم و کافی برای آنکه دو عدد (α, β) کوسینوس های هادی باشند آنستکه: $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ باشد.

۲ - چنانکه θ زاویه بین:

ش ۱۸

Ox و It باشد $\theta = (Ox, It)$ مقادیر α و β برحسب θ بصورت:

$$\alpha = \cos\theta . \qquad \beta = \sin\theta .$$

و یا: $\quad \alpha = \cos(Ox, It) \quad \beta = \cos(Oy, It) \quad$ بیان می شوند.

نام کوسینوس هادی بمناسبت روابط اخیر بوده و همچنین باید یاد آور شد که کوسینوس های هادی نسبت دو طول بوده وازآنجا بدون بعد می باشند.

۳۸ - تعیین یك نیم خط یا خط راستا دار در فضا - بهمین ترتیب درفضا جهت تعیین امتداد یك نیم خط یا خط راستا دار تصاویر α ، β ، γ یك بردار یکه $\vec{u}$ واقع روی آنرا میدهند. این مقادیر را کوسینوس های هادی و یا پارامترهای هادی اصلی نامیده و دربستگی: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ و یا $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$ صدق میکنند. شرط بالا شرط لازم و کافی برای آنکه سه عدد (α, β, γ) کوسینوسهای هادی باشند بوده و همچنین خواهیم داشت:

$$\alpha = \vec{u} \cdot \vec{i} \qquad \beta = \vec{u} \cdot \vec{j} \qquad \gamma = \vec{u} \cdot \vec{k}$$

و یا: $\quad \alpha = \cos(Ox, It) \quad \beta = \cos(Oy, It) \quad \gamma = \cos(Oz, It)$

۳۹ - گوشه دو خط راستا دار در صفحه - V را گوشه بین دو خط راستا دار It و $I't'$ با بردار های یکه $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ و کوسینوسهای هادی (α, β) و (α', β') فرض میکنیم. چون صفحه راستا دارفرض شده‌است V با تقریب $2k\pi$

تعیین گشته و در نتیجه خطوط مثلثاتی آن کاملا مشخص میباشند :

$$\cos V = \vec{u} . \vec{u'} \quad \text{و یا} \quad \cos V = \alpha \alpha' + \beta \beta'$$

$$\sin V = \text{اندازهٔ} \; (\vec{u} \wedge \vec{u'}) \quad \text{و یا} \quad \sin V = \alpha \beta' - \beta \alpha'$$

$$tg\, V = \frac{\alpha \beta' - \beta \alpha'}{\alpha \alpha' + \beta \beta'}$$

شرایط عمود بودن و موازی بودن ازاین دستور ها نتیجه میشوند :

شرط موازی بودن: $\vec{u} \wedge \vec{u'} = 0$ ویا $\alpha \beta' - \beta \alpha' = 0$

شرط عمود بودن: $\vec{u} . \vec{u'} = 0$ ویا $\alpha \alpha' + \beta \beta' = 0$ خواهندشد

شرط بالا برای موازی بودن همان شرط تناسب α و β و α' و β' بوده و نسبت آنها ۱+ یا ۱− است برحسب آنکه دو برداریکه همسویاباسوهای مخالف باشند

چنانکه $I t$ باکوسینوسهای هادی (α , β) داده شده باشد وبخواهیم α_1 و β_1 کوسینوسهای هادی $I t_1$ عمود مستقیم بآنرا حساب کنیم از دستورهای زیر استفاده میکنیم :

$$\cos V = 0 \qquad \alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 = 0$$

$$\sin V = 1 \qquad \alpha \beta_1 - \beta \alpha_1 = 1$$

و از آنجا مقادیر α_1 و β_1 و $\beta_1 = + \alpha$ و $\alpha_1 = - \beta$ بدست میآیند

۴۰ ـ گوشه دو خط راستا دار در فضا ـ در اینجا هم V را گوشه دو خط راستا دار $I t$ و $I' t'$ با بردار های یکه $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ و کوسینوس های هادی $(\alpha , \beta , \gamma)$ و $(\alpha', \beta', \gamma')$ فرض میکنیم . در اینحالت V فقط با تقریب علامت معلوم بوده :

$$(I t, I' t') = \pm V + 2 k \pi$$

و از آنجا حبیب تمام آن فقط مشخص میباشد :

$$\cos V = \vec{u} \cdot \vec{u'} \qquad \cos V = \alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma'$$

شرط موازی بودن دو امتداد چنانکه دیدیم : $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \pm 1$

و شرط عمود بودن $\cos V = 0$ $\alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma' = 0$ میباشند

در مورد موازی بودن نسبت تصاویر مساوی ۱ + یا ۱ — است بر حسب آنکه دو نیم خط همسو یا با سوهای مخالف باشند.

مسئله - It و It' را دو نیم‌خط عمود بهم گرفته میخواهیم کوسینوسهای هادی نیم خط It'' عمود مستقیم بآن دو را پیدا نمائیم.

چنانکه $\overrightarrow{u''}$ برداریکه باتصاویر α'' ، β'' ، γ'' واقع‌روی It'' باشدخواهیم‌داشت:

$$\overrightarrow{u''} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}$$

واز آنجا : $\alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta' \quad \beta'' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma' \quad \gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha'$

خواهند بود.

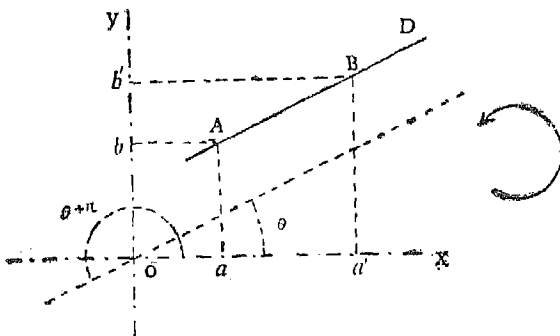
۴۱ - خط بدون راستا - زاویه Ox باچنین‌خطی θ یا $\theta + \pi$ بوده بین‌خطوط مثلثاتی فقط ظل آن‌که بضریب زاویه خط معروف‌است مشخص بوده وازآنجا نتایج زیر را میتوان برای آن بیان نمود :

۱- ضریب زاویه خط D نسبت تصاویر یك بردار غیرمشخص $\overline{AB}$ واقع روی خط بوده یعنی : $m = \dfrac{\overline{bb'}}{\overline{aa'}}$ میباشد.

۲- همچنین نسبت نمو طول بنمو عرض وقتیکه از نقطه A بنقطه دیگر B که روی خط واقع شده‌اند برویم میباشد.

۳ - و همچنین نسبت کوسینوسهای هادی یك امتداد روی خط نیز خواهد بود : $m = \dfrac{\beta}{\alpha}$

ش ۱۹

زاویه دو خط D و D' که توسط ضریب زاویشان مشخص شده اند فقط با تقریب π در صفحه راستا دار

تعیین گشته واز آنجا ظل آن معین بوده و برای بدست آوردن آن از دستور قبل استفاده میکنیم بدین ترتیب که صورت ومخرج را بر $\alpha\alpha'$ تقسیم میکنیم . از آنجا :

$$tg\,(D\,,D') = \frac{m'-m}{1+m\,m'}$$

بدست آمده و شرط عمود بودن در اینحال بصورت : $1+m\,m'=0$ نوشته میشود .

۴۳ - پارامترهای هادی یك خط درصفحه - پارامترهای‌هادی‌یك‌خط‌ویایك دسته خط موازی تصاویر (p,q) یك برداز غیر مشخص واقع روی خط ویا یکی ازخطوط دسته میباشند .

پارامترهای هادی یك خط کاملامشخص نبوده یعنی دودستگاه پارامتر $(p\,,q)$ و (p',q') یك خط باهم متناسب میباشند وازآنجا میتوان گفت که پارامترهای‌هادی با تقریب یك ضریب تناسب معلوم میباشند .

شرط موازی بودن‌دوامتداد باپارامترهای $(p\,,q)$ و $(p'\,,q')$: $pq'-qp'=0$

و شرط عمود بودن آنها : $pp'+qq'=0$ خواهند بود .

ضرب زاویه نسبت پارامترهای‌هادی بوده $m=\frac{q}{p}$ وبالاخره‌پارامترهای‌هادی اصلی $(\alpha\,,\beta)$ یك خط راستا دار $I\,x$ را میتوان یك دستگاه پارامترهادی خط بدون راستای D که منطبق بر $I\,x$ باشد دانست . چنانکه دیدیم $(\alpha\,,\beta)$ تصاویر یك بردار یکه $\vec{u}$ واقع روی $I\,x$ بوده وازطرفی $(p\,,q)$ تصاویر یك بردارغیرمشخص $\vec{a}$ واقع روی همان امتداد بوده و از آنجا رابطه بین آنها چنین خواهد بود :

$$\frac{\alpha}{p}=\frac{\beta}{q}=\frac{\pm 1}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

۴۴ - پارامترهای هادی‌یك امتداد درفضا - برای یك خط بدون راستا در فضا ضریب زاویه وجود نداشته ولی میتوان امتداد آنرا بکمك‌پارامترهای هادی مشخص نمود .

پارامترهای هادی یك امتداد تصاویر (r , q , p) یك بردار غیر مشخص واقع روی آن امتداد بوده و البته تمام خطوط موازی را میتوان دارای همان دستگاه پارامتر فرض نمود .

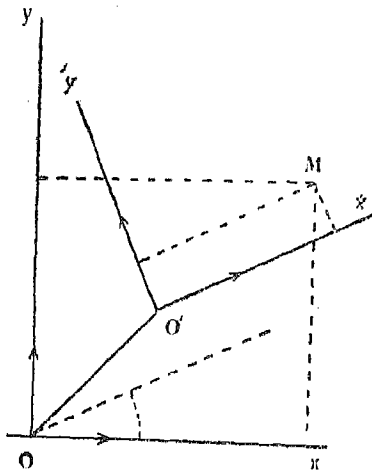
پارامترهای هادی با تقریب یك ضریب تناسب معلوم بوده و از آنجا هر رابطه بین آنها همگن خواهد بود .

چنانکه دو امتداد با پارامترهای (r , q , p) و (p' , q' , r') داده شده باشند شرط موازی بودن آنها : $\frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'}$

و شرط عمود بودن آنها $pp' + qq' + rr' = 0$ خواهند بود .

و بالاخره جیب تمامهای هادی یك محور واقع روی یك امتداد با تقریب علامت تعیین گشته و مقادیر آنها برحسب p و q و r چنین اند :

$$\alpha = \frac{\pm p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \quad \beta = \frac{\pm q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \quad \gamma = \frac{\pm r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

۴۴ ـ تغییر محور های مختصات در صفحه ـ دو دستگاه مختصات قائم (Ox , Oy) و ($O'x'$, $O'y'$) در صفحه راستا داری داده شده اند میخواهیم چنانکه مختصات نقطه M از صفحه و یا تصاویر یك بردار $\vec{a}$ در صفحه را نسبت به دستگاهی بدانیم مختصات این نقطه و یا تصاویر آن بردار را نسبت بدستگاه دیگر و یا بطور کلی روابط بین این دو دستگاه مختصات را تعیین کنیم برحسب آنکه مختصات مبداء O' دستگاه دوم را نسبت بدستگاه اول و زاویه (Ox و $O'x'$) $= \alpha$ در محور را داشته باشیم مختصات نقطهٔ O را نسبت بدستگاه دیگر

ش ۲۰

x_0 و y_0 ومختصات نقطه M را نسبت بدو دستگاه بترتیب (x, y) و (x', y') و همچنین بردار های یکه محور ها را بترتیب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{i'}$ و $\vec{j'}$ فرض میکنیم .

تصاویر بردار $\vec{i'}$ در روی $0x$, $0y$ ویاکسینوسهای هادی امتداد $0'x'$ بترتیب مساوی : $\cos(Ox, O'x') = \cos\alpha$ و $\cos(Oy$ و $0'x') = \sin\alpha$ میباشند .

بستگی اخیر پس از نوشتن رابطه شال جهت زوایا بدست میآید زیرا :

$$(0y \text{ و } 0'x') = (0y \text{ و } 0x) + (0x \text{ و } 0'x') = \alpha - \frac{\pi}{2}$$

و $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$ میباشد

و همینطور تصاویر بردار $\vec{j'}$ روی $0x$ و $0y$ بترتیب :

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha \qquad \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$$

خواهند بود زیرا در اینحال زاویه مربوطه $\alpha + \frac{\pi}{2}$ میباشد .

پس از آنچه گفته شد بستگی های زیر را خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{00'} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \vec{j}$$

$$\vec{i'} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha \qquad \vec{j'} = -\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha$$

حال برای بدست آوردن معادلات مطلوب بستگی هندسی زیر را مینویسیم :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{00'} + \overrightarrow{O'M} = (x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}) + (x' \cdot \vec{i'} + y' \vec{j'})$$

$$= x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + x' (\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha) + y' (-\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha)$$

چنانکه برحسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ مرتب کنیم خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{OM} = (x_0 + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)\vec{i} + (y_0 + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)\vec{j}.$$

حال از طرفی . $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$ بوده .

پس از آنجا :

$$\begin{cases} x = x_0 + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = y_0 + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

که فرمولهای تبدیل مختصات یك نقطه میباشند خواهیم داشت .

در مورد یك بردار دستور های فوق بدین صورت در میآیند :

$$\vec{a} = X'\vec{i'} + Y'\vec{j'} = X'(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha) + Y'(-\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha)$$
$$= (X'\cos\alpha - Y'\sin\alpha)\vec{i} + (X'\sin\alpha + Y'\cos\alpha)\vec{j}$$

و از آنجا دستور های تبدیل مولفه های یك بردار :

$$\begin{cases} X = X'\cos\alpha - Y'\sin\alpha \\ Y = X'\sin\alpha + Y'\cos\alpha \end{cases}$$

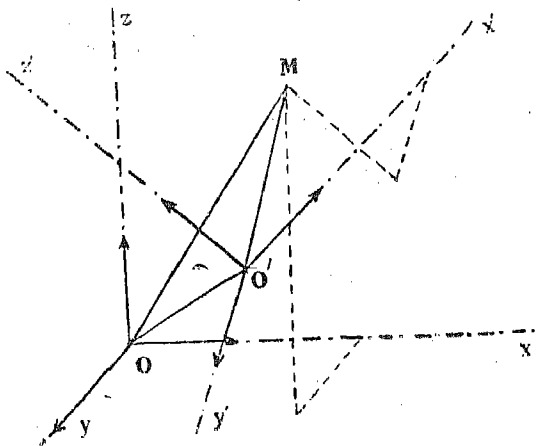
و از همین راه و یا با حل دستورهای بالا نسبت به x' و y' دستورهای عکس دستورهای فوق راکه مختصات جدید را برحسب مختصات قدیم بدهد خواهیم داشت

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha \\ y' = -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha \end{cases}$$

۴۵ ـ حالات مخصوص ـ محور های جدید با محور های قدیم موازیند .

دستور های بالا بصورت : $x = x_0 + x'$ ، $y = y_0 + y'$ درمیآیند .

چنانکه مبداء ثابت باشد کافی است که دردستور های بالا x_0 و y_0 راصفر کنیم

۴۶ ـ تغییر محور های مختصات در فضا ـ دودستگاه محورهای مختصات قائم ومستقیم $O\,x\,y\,z$ و $O'\,x'\,y'\,z'$ در فضای راستا داری فرض کرده میخواهیم چنانکه مختصات مبداء O' دستگاه دوم (x_0, y_0, z_0) را نسبت بدستگاه اول وهمچنین کوسینوسهای هادی محور های جدید را نسبت بمحور های قدیم یعنی : (α, β, γ) و $(\alpha', \beta', \gamma')$ و $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$

ش ۲۱

رابدانیم بستگی های موجود بین مختصات (x, y, z) و (x', y', z') یك نقطه M دراین

دو دستگاه مختصات و یا بین تصاویر (X , Y , Z) و (X' , Y' , Z') یك بردار $\vec{a}$ را پیدا کنیم .

برای رفع اشتباه کوسینوسهای هادی را در جدولی مینویسیم :

	O x	O y	O z
O x'	α	β	γ
O y'	α'	β'	γ'
O z'	α''	β''	γ''

دراین جدول هریك ازعوامل کوسینوس بین دو محور مربوطه است .

از طرفی هر کوسینوس را میتوان حاصل ضرب داخلی دو بردار یکه واقع روی محور ها دانست یعنی :

$$\alpha = \vec{i}\cdot\vec{i'} \qquad \beta = \vec{j}\cdot\vec{i'} \qquad \gamma = \vec{k}\cdot\vec{i'}$$
$$\alpha' = \vec{i}\cdot\vec{j'} \qquad \beta' = \vec{j}\cdot\vec{j'} \qquad \gamma' = \vec{k}\cdot\vec{j'}$$
$$\alpha'' = \vec{i}\cdot\vec{k'} \qquad \beta'' = \vec{j}\cdot\vec{k'} \qquad \gamma'' = \vec{k}\cdot\vec{k'}$$

این ۹ کوسینوس مستقل نبوده و بستگی های موجود بین آنها را بعد یادآور می شویم .

برحسب مفروضات مسئله بستگی های برداری زیر را مینویسیم :

$$\overrightarrow{OO'} = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k}$$
$$\vec{i'} = \alpha\,\vec{i} + \beta\,\vec{j} + \gamma\,\vec{k}$$
$$\vec{j'} = \alpha'\,\vec{i} + \beta'\,\vec{j} + \gamma'\,\vec{k}$$
$$\vec{k'} = \alpha''\,\vec{i} + \beta''\,\vec{j} + \gamma''\,\vec{k}$$

حال :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$
$$= (x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k}) + (x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} + z'\,\vec{k'})$$

چنانکه بجای $\vec{i'}$ و $\vec{j'}$ و $\vec{k'}$ مقادیرشان را قرار داده و نسبت به $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ مرتب کنیم از مقایسه بستگی حاصل با بستگی : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

دستور های تبدیل مختصات بدست میآیند :

$$x = x_0 + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z'$$
$$y = y_0 + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z'$$
$$z = z_0 + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'$$

در مورد تصاویر یك بردار مبداء دخالت نکرده و دستورهای زیررا خواهیم داشت :

$$X = \alpha X' + \alpha' Y' + \alpha'' Z'$$
$$Y = \beta X' + \beta' Y' + \beta'' Z'$$
$$Z = \gamma X' + \gamma' Y' + \gamma'' Z'$$

چنانکه فرمولهای بالا را نسبت به x' و y' و z' حل کنیم دستور های عکس آنهارا خواهیم داشت :

$$x' = \alpha\ (x - x_0) + \beta\ (y - y_0) + \gamma\ (z - z_0)$$
$$y' = \alpha'\ (x - x_0) + \beta'\ (y - y_0) + \gamma'\ (z - z_0)$$
$$z' = \alpha''\ (x - x_0) + \beta''\ (y - y_0) + \gamma''\ (z - z_0)$$

تبصره ـ چنانکه گفتیم ۹ جیب تمام بالا مستقل نبوده و بین آنها بستگی های زیر که رویهم بیش از شش بستگی مستقل نیستند بر قرار میباشند :

بستگی های ۱

بصورت برداری $\quad \vec{j'}\vec{k'} = \vec{k'}\vec{i'} = \vec{i'}\vec{j'} = 0 \qquad \vec{i'}^2 = \vec{j'}^2 = \vec{k'}^2 = 1$

بصورت کارتزین
$$\begin{cases} \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0 \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0 \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1 \end{cases}$$

بستگی های ۲

بصورت برداری $\quad \vec{j}\,\vec{k} = \vec{k}\,\vec{i} = \vec{i}\,\vec{j} = 0 \qquad \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$

بصورت کارتزین
$$\begin{cases} \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0 \\ \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = 0 \\ \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1 \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1 \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \end{cases}$$

و بالاخره چنانکه شرایط بهم عمود بودن سه بردار را بنویسیم :

$$\vec{k'} = \vec{i'} \wedge \vec{j'} \qquad \vec{j'} = \vec{k'} \wedge \vec{i'} \qquad \vec{i'} = \vec{j'} \wedge \vec{k'}$$

$$\begin{cases} \alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta' \\ \beta'' = \gamma\alpha' - \alpha\gamma' \\ \gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha' \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha' = \beta''\gamma - \gamma''\beta \\ \beta' = \gamma''\alpha - \alpha''\gamma \\ \gamma' = \alpha''\beta - \beta''\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' \\ \beta = \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'' \\ \gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' \end{cases}$$

وهمچنین نسبت بسه بردار یکه دیگر بستگی های :

$$\vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{k} \qquad \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i} \qquad \vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$$

ا میتوان نوشت . از طرفی حاصل ضربهای مختلط زیر همگی مساوی یك بوده .

$$\vec{i}\,(\vec{j} \wedge \vec{k}) = \vec{j}\,(\vec{k} \wedge \vec{i}) = \vec{k}\,(\vec{i} \wedge \vec{j}) = 1$$

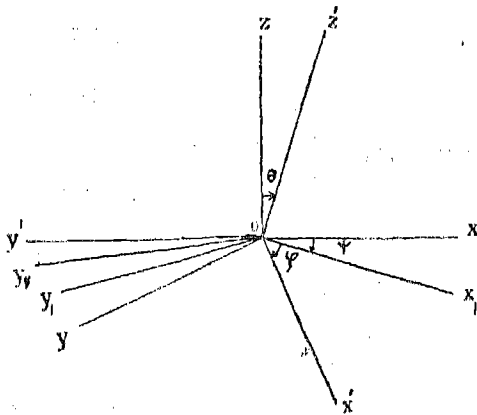
$$\vec{i'}\,(\vec{j'} \wedge \vec{k'}) = \vec{j'}\,(\vec{k'} \wedge \vec{i'}) = \vec{k'}\,(\vec{i'} \wedge \vec{j'}) = 1$$

و چنانکه گفتیم این بستگی ها مستقل نبوده و اگر مثلا شش بستگی ۱ را داشته باشیم میتوانیم از آنها بستگی های دیگر را نتیجه بگیریم .

۴۷ ـ زوایای اولر ـ چنانکه دیدیم نه کوسینوس هادی توسط ٦ بستگی بهم مربوطند پس باید بتوان آنها را برحسب سه پارامتر بیان نمود .

این سه پارامتر سه زاویه اولر بوده و بدین ترتیب تعیین میشوند :

دودستگاه مختصات قائم فرض نموده ازنقطه O مبداء اولی سه وجهی دیگری موازی و همسوی سه وجهی دوم مرور میدهیم بدین ترتیب دو سه وجهی $O\,x\,y\,z$ و $O\,x'\,y'\,z'$ خواهیم داشت. خط تلاقی دوصفحه $O\,x\,y$ و $O\,x'\,y'$ راکه عمود بصفحه $O\,z\,z'$ است $O\,x_1$ نامیده در روی این خط سوئی را سوی مثبت اختیار میکنیم .

زوایای اولر عبارتند از : $\psi = (O\,x\,,\,O\,x_1)$ موسوم به *Précession*
$\theta = (O\,z\,,\,O\,z')$ *Nutation* و $\varphi = (O\,x_1\,,\,O\,x')$ ویا *Rotation propre*

حال ثابت میکنیم که باداشتن این سه زاویه میتوان وضعیت سه وجهی دوم را نسبت به سه وجهی اول کاملا مشخص نمود بدین منظور دو امتداد دیگر $O\,y_1$ و $O\,y_2$ را عمودمستقیم به $O\,x_1$ در صفحات $O\,x\,y$, $O\,x'\,y'$ انتخاب می کنیم .

ش ۲۲

دو سه وجهی دیگر $O x_1 y_1 z$ و $O x_1 y_2 z'$ بدست آمده و ثابت میکنیم که با سه دوران میتوان از سه وجهی اول بسه وجهی دوم رسید .

دوران اول عبارتست از دوران بزاویه ψ در حول $O z$ سه وجهی اول برسه وجهی $O x_1 y_1 z$ منطبق میگردد .

دوران دوم عبارت ازدوران بزاویه θ درحول $O x_1$ بوده سه‌وجهی $O x_1 y_1 z$ بسه وجهی $O x_1 y_2 z'$ مبدل میگردد .

دوران سوم دوران بزاویه φ در حول $O z'$ بوده سه وجهی $O x_1 y_2 z'$ بسه وجهی $O x' y' z'$ منطبق میگردد زیرا محور $O z'$ ثابت بوده وچون $O x_1$ بر $O x'$ منطبق میشود پس $O y_2$ هم منطبق بر $O y'$ خواهد شد چون هردوسه وجهی قائمند

حال برای برقراری دستور های تبدیل مختصات ملاحظه میکنیم که چنانکه x ، y ، z و x' ، y' ، z' رامختصات M نسبت بدودستگاه $O x y z$ و $O x' y' z'$ بگیریم بارفتن ازدستگاه $O x y z$ بدستگاه $O x_1 y_1 z$ ارتفاع z نقطه M تغییرنکرده ومسئله منجر بتبدیل دستگاه مختصات در صفحه $x y$ میگردد چنانکه x_1 و y_1 مختصات جدید باشند میدانیم که فرمولهای تغیر دستگاه در صفحه در این حال :

$$x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi$$
$$y = x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi$$

میباشند چنانکه از دستگاه اخیر بدستگاه $O x_1 y_2 z'$ برویم طول x_1 تغییر نکرده و معادلات زیر را خواهیم داشت :

$$y_1 = y_2 \cos\theta - z' \sin\theta$$
$$z = y_2 \sin\theta + z' \cos\theta$$

و بالاخره چنانکه از دستگاه $O x_1 y_2 z'$ بدستگاه $O x' y' z'$ برویم z' تغییر نکرده پس معادلات بصورت :

$$x_1 = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$$
$$y_2 = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$$

درآمده و چنانکه x_1 ، y_1 ، y_2 را بین این بستگی ها حذف کنیم

$$\begin{cases} x = (x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)\cos\psi - [(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)\cos\theta - z' \sin\theta]\sin\psi \\ y = (x' \cos\varphi - y' \sin\varphi)\sin\psi + [(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)\cos\theta - z' \sin\theta]\cos\psi \\ z = (x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)\sin\theta + z' \cos\theta \end{cases}$$

و یا :

$$\begin{cases} x = x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) - y'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) + z' \sin\theta\sin\psi \\ y = x'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) - y'(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) - z' \sin\theta\cos\psi \\ z = x' \sin\varphi\sin\theta + y' \cos\varphi\sin\theta + z' \cos\theta \end{cases}$$

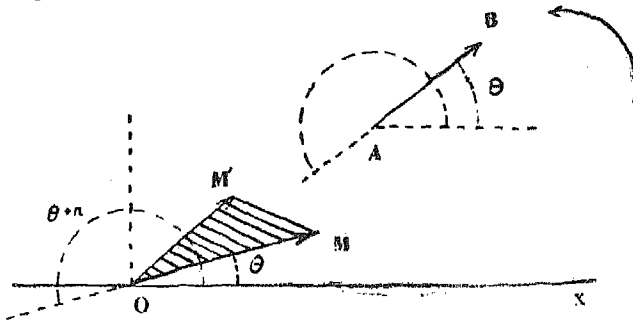
که فرمولهای اولر نامیده میشوند خواهیم داشت . ضرایب x' و y' و z' این بستگی ها مقادیر کوسینوسهای هادی برحسب زوایای اولر میباشند .

۴۸ ـ مختصات قطبی یك بردار ـ در صفحهٔ راستا دار نقطهٔ O قطب ومحور Ox موسوم بمحور قطبی مفروض میباشند برای تعیین بردار $\overrightarrow{AB}$ سوی مستقیمی روی حامل آن انتخاب کرده این سو را $z'z$ مینامیم مختصات قطبی $\overrightarrow{AB}$ اندازهٔ $\rho = \overline{AB}$ روی $z'z$ و گوشهٔ $\theta = (Ox, z'z)$ میباشند .

بهر دستگاه ρ و θ یك بردار مربوط بوده ولی بالعکس چنانکه یك بردار داشته باشیم دو دستگاه بینهایت مختصات قطبی :

$$\begin{cases} \theta + 2k\pi \\ \rho \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta + \pi + 2k\pi \\ -\rho \end{cases}$$

مربوط بآن میباشند زیرا میتوان دو سوی مثبت مخالف روی $\overrightarrow{AB}$ انتخاب نمود .

ش ۲۳

بستگی های زیر بین مختصات کارتزین X ، Y یك بردار و مختصات قطبی آن بر قرار میباشند :

$$X = \rho\cos\theta \qquad Y = \rho\sin\theta$$

$$tg\,\theta = \frac{Y}{X} \qquad \rho = \frac{X}{\cos\theta} = \frac{Y}{\sin\theta}$$

۴۹ ـ مختصات قطبی یك نقطه ـ مختصات قطبی نقطه M همان مختصات قطبی بردار $\overrightarrow{OM}$ میباشند در این حال ρ را شعاع حامل و θ را زاویه قطبی نقطه M نامند و همانطور که در مورد بردار گفته شد دو دسته بینهایت مختصات قطبی جهت هر نقطه موجود است و آنها عبارتند از :

$$\theta + 2k\pi \qquad \theta + \pi + 2k\pi$$
$$\rho \qquad\qquad -\rho$$

بستگی‌های زیر بین مختصات قطبی و مختصات کارتزین وابسته بدستگاه قطبی موجود میباشند .

$$x = \rho \cdot \cos\theta \cdot \qquad y = \rho \cdot \sin\theta \cdot$$

و یا : $$tg\,\theta = \frac{y}{x} \qquad \rho = \frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta}$$

۵۰ ـ حاصل ضرب داخلی و خارجی دو بردار ـ مختصات قطبی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{a}'$ واقع در یك صفحه راستا دار را بترتیب (θ, ρ) و (ρ', θ') فرض نموده حاصل ضرب داخلی آنها : $\vec{a} \cdot \vec{a}' = \rho \cdot \rho' \cos(\theta' - \theta)$ خواهد بود .

چنانکه $\vec{k}$ را بردار یکه عمود بصفحه فرض کنیم حاصل ضرب خارجی آنها نیز : $\vec{a} \wedge \vec{a}' = [\rho\rho' \sin(\theta' - \theta)]\vec{k}$ میباشد .

۵۱ ـ فاصله و مساحت در مختصات قطبی ـ دو نقطه M و M' را با مختصات قطبی (θ, ρ) و (ρ', θ') و مختصات کارتزین (x, y) و (x', y') فرض کرده مجذور فاصله آنها :

$$\overrightarrow{MM'}^2 = (\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OM'})^2 + (\overrightarrow{OM})^2 - 2 \cdot \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM}$$
$$= \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho \cdot \rho' \cdot \cos(\theta' - \theta)$$

خواهد بود . مساحت مثلث OMM' را نیز میتوان ازراه حاصل ضرب خارجی بدست آورد این سطح + یا − است برحسب آنکه شعاع حامل که از M بسمت M' برود در جهت مثبت یا منفی صفحه چرخش نماید . این سطح مساوی نصف اندازهٔ حاصل ضرب خارجی $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM'}$ میباشد :

سطح $OMM' = \frac{۱}{۲}\rho\rho' \cdot \sin(\theta' - \theta) = \frac{۱}{۲}(xy' - yx')$

۵۴ - گوشه های قطبی خط راستا دار در فضا - میتوان امتداد خط راستا داری را درفضا توسط دوزاویه معین کرد بدین منظور خط Ot را که بموازات خط مفروض وهمسوی آن رسم شده است روی صفحه Oxy تصویرمیکنیم. برروی خط حاصل سوئی را سوی مثبت میگیریم.

چنانکه آنرا Ot' بنامیم صفحه Ot و Ot' شامل Oz بوده دراین صفحه سوی + دوران را از Oz بسمت Ot' میگیریم.

زوایای: $\theta = (Oz, Ot)$ و $\varphi = (Ox, Ot')$ با تقریب ۲π در صفحات راستا دار (Ox, Oy) و (Oz, Ot') تعیین گشته وآنها را زوایای قطبی امتداد راستا دار و با سامی طول سماوی و متمم عرض سماوی نامیده میشوند

واضح است که چنانکه (φ, θ) دادهشدهباشند امتدادخط راستا دار مشخص گشته ولی برعکس بهر خط راستا دار دو دستگاه زوایای قطبی مربوط میباشند. بر حسب آنکه امتداد مثبت روی Ot' را تغییر دهیم این دو دستگاه بترتیب: $(\varphi + \pi, -\theta)$ و (φ, θ) خواهند بود.

چنانکه $\vec{u}$ و $\vec{u'}$ را بردار های یکه امتداد های Ot و Ot' بگیریم بستگی های موجود بین گوشه های قطبی و کوسینوس های هادی عبارتند از:

$$\vec{u} = \vec{u'} \cdot \sin\theta + \vec{k} \cdot \cos\theta$$

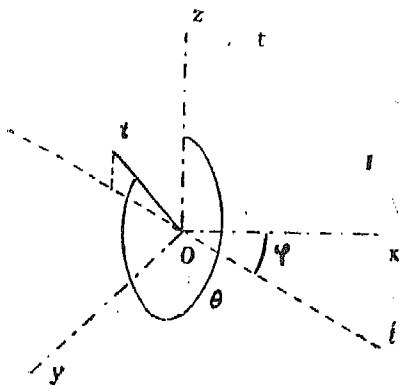
$$\vec{u'} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$$

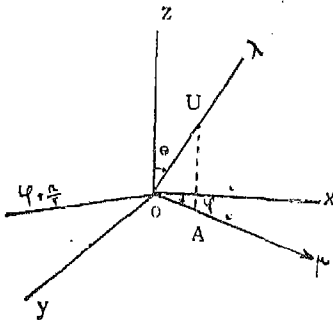
و از آنجا:

$$\vec{u} = \vec{i}\cos\varphi\sin\theta + \vec{j}\sin\varphi\sin\theta + \vec{k}\cos\theta$$

ش ٢٤

پس ازآنجا نتیجه میشود که کوسینوس های هادی امتدادی با زوایای قطبی (φ, θ)

بترتیب $\sin\theta\cos\varphi$ روی Ox و $\sin\theta\sin\varphi$ روی Oy و $\cos\theta$ روی Oz میباشند .

۴۳ ـ مختصات قطبی و استوانهٔ در فضا ـ سه‌وجهی قائم $Oxyz$ را فرض کرده مختصات قطبی نقطه U مقادیر ρ و φ و θ بوده و بدین ترتیب معین میشوند که درروی خط OU امتداد مثبت $O\lambda$ را انتخاب‌کرده ρ را اندازه جبری $\overrightarrow{OU}$ و φ و θ گوشه های قطبی این امتداد خواهند بود .

ش ۲۵

چنانکه U را در روی صفحه xOy تصویر کنیم و مختصات قطبی ρ و ω نقطه u حاصل را در نظر بگیریم مقادیر ρ ، ω ، z را دستگاه مختصات استوانهٔ نقطه U مینامند .

۴۴ ـ مختصات همگن ـ چنانکه نقطه M طوری در فضا حرکت کندکه OM بینهایت شود گوئیم که M بسمت بینهایت‌دور میشود . چنانکه (x, y, z) مختصات کارتزین نقطه M باشند لااقل یکی از آنها در حد بینهایت شده و چنانکه نقطه M در صفحه واقع نباشد هرسه آنها بینهایت میشوند و برعکس چنانکه مختصات یك نقطه بینهایت شوند آن نقطه در بینهایت واقع است ولی از امتدادی که آن نقطه در امتداد آن به بینهایت رفته است اطلاعی در دست نیست رفع این نقص را با بکار بردن مختصات همگن میتوان نمود .

تعریف ـ مختصات همگن نقطه $M(x, y, z)$ هر دستگاه مرکب از چهار عدد X ، Y ، Z ، T میباشد بطوریکه بین آنها و مختصات معمولی بستگی های :

$$x = \frac{X}{T} \qquad y = \frac{Y}{T} \qquad z = \frac{Z}{T}$$

بر قرار باشند .

چنانکه میبینیم هر نقطه دارای بینهایت دستگاه مختصات همگن بوده وچنانکه $T = 1$ باشد X ، Y ، Z همان مختصات معمولی خواهند شد .

اگر نقطه M در امتداد ٪ O که پارا متر های هادی آن (a , b , c) است به سمت بینهایت دور شود میتوانیم در هر لحظه X ، Y ، Z را پارا متر های هادی O M فرض کنیم البته در حد این اعداد باید متناسب a ، b ، c شوند با استفاده از اینکه مختصات همگن با ضریب یك تناسب معلوم اند میتوان آنهارا درحد مساوی a ، b ، c گرفت . از طرفی چون x ، y ، z بینهایت میشوند و چون X ، Y ، Z هر سه مخالف صفرند لازمست که T بسمت صفر میل نماید . پس از آنجا نتیجه میشود که چنانکه M بسمت بینهایت در امتداد ٪ O رود مختصات همگن آن بسمت (a , b , c , O) میل خواهند کرد .

و برعکس چنانکه X ، Y ، Z ، T بسمت a ، b ، c ، O میل کنند چون لا اقل یکی از پارامترهای هادی a ، b ، c صفر نیست پس یکی ازمختصات x ، y ، z بینهایت خواهد شد . از طرفی پارا متر های X ، Y ، Z در حد a ، b ، c شده و O M دارای وضعیت حد ٪ O خواهد شد . و بالاخره میتوان گفت که نقطهٔ واقع در بینهایت در امتدادی باپارامترهای هادی a ، b ، c دارای مختصات همگن (a , b , c , O) میباشد

پس میتوان با بکار بردن مختصات همگن نقاط بینهایت را ازهم جدا نموده و با بکار بردن این مختصات یگانه اختلاف بین نقاط بینهایت و نزدیك آنست که بازاء آنها ۱ = T میباشد .

۵۵ ـ **نقاط موهومی** ـ تا بحال مختصات نقاط را اعداد حقیقی فرض کرده بودیم چنانکه مختصات نقاطی اعداد موهومی باشند آن نقاط را موهومی گویند .

چنانکه هرسه عدد حقیقی باشند آن نقطه حقیقی واگر یکی ازآنها موهومی باشد آن نقطه موهومی خواهد شد . نقاط موهومی از لحاظ تعمیم قضایای هندسی بکار رفته و همان تعاریف و دستور های نقاط حقیقی در باره آنها صادق میباشند .

بخش سوم
خط و سطح

۵۶ - معادله خط در صفحه - منظور طرز نمایش خط غیرمشخص یعنی منحنی و یاخم درصفحه میباشد . چنانکه دیده میشود مختصات نقاط مختلف یك منحنی درصفحه مقادیر مستقل نداشته و فرض میکنیم که بین مختصات کارتزین نقاط آن بستگی :

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

برقرار باشد . البته بین مختصات این نقاط بیش از یك رابطه نمیتوانند وجود داشته باشد زیرا درغیر این صورت میتوان x و y را از این بستگی‌ها پیدا نمود ودر نتیجه نقاط مربوط بآنها محدود خواهند بود .

و بر عکس نقاطی از سفحه که مختصات آنها در بستگی (۱) صدق میکند در نظرمیگیریم چنانکه به x مقدارمعینی بدهیم ریشه‌های این معادله مقادیر y_1 ، y_2 ، y_3 بوده و نقاط مربوطه آنها $M_1(x, y_1)$ و $M_2(x, y_2)$ و $M_3(x, y_3)$ . . . میباشند چنانکه حال x را از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر دهیم این نقاط درصفحه نمایش قوسهائی که تشکیل تمام منحنی (C) معادله (۱) را میدهند خواهند داد .

پس بطور کلی معادله (۱) معادله منحنی (C) خواهد بود چنانچه مختصات هر نقطه (C) در معادله (۱) صدق کرده و بر عکس هر نقطه که مختصات آن در (۱) صدق کند جزو منحنی (C) میباشد .

تبصره - آنچه که درباره مختصات کارتزین گفته شد در باره هرنوع مختصات دیگر نیز صادق میباشد . از طرفی استدلال فوق چنانکه معادله (۱) دارای y نباشد صحیح نبوده و در اینحال این معادله بازاء مقادیری از x بر قرار خواهد بود . مکان این نقاط خطی موازی Oy خواهد شد .

۵۷ - منحنی های جبری - منحنی جبری منحنی میباشد که معادله آن در مختصات کارتزین بصورت کثیر الجمله از x و y نوشته شود . درجه این کثیرالجمله

درجه منحنی خواهد بود. بآسانی میتوان ثابت نمود که این تعریف بستگی بانتخاب محور ها نخواهد داشت زیرا دستور های تغییر محور ها معادلاتی ازدرجه اول بوده و در نتیجه درجه معادله تغییر یافته همان درجه معادله اول خواهد بود.

قضیه ـ هر منحنی جبری از درجه m در m نقطه هرخط مستقیم از صفحه را تلاقی مینماید.

اثبات ـ بر حسب آنچه که گفته شد میتوان محور های مختصات را طوری انتخاب کرد که خط مفروض محور x O باشد پس برای یافتن نقاط تلاقی باید $y = ۰$ نمود پس معادله حاصل $f(x, ۰) = ۰$ (۲) از درجه m شده و دارای m ریشه که مربوط به m نقطه تلاقی اند خواهد بود.

ولی باید یادآور شد که گاهی ممکن است درجه معادله (۲) باندازهٔ p واحد از m کوچکتر باشد در اینحال گویند p نقطه برخورد دربینهایت میباشند. همچنین چنانکه معادله (۲) دارای ریشه مکرر ازمرتبه n باشد باید نقطه مربوطه را n دفعه حساب کرده و بهمین ترتیب اگر معادله (۲) دارای ریشه های موهومی باشد باید نقاط موهومی مربوطه را نیز حساب نمود.

قضیه ـ برای آنکه دو معادله $f(x, y) = ۰$ و $g(x, y) = ۰$ نمایش یك منحنی را بدهند لازم و کافیست که دارای جملاتی متناسب باشند.

اولا این شرط کافی است زیرا چنانچه بر قرار باشد خواهیم داشت:

$$g(x, y) \equiv k f(x, y) \qquad (۳)$$

و در نتیجه هر نقطه که مختصاتش در f صدق کند در g نیز صدق خواهد کرد و بر عکس.

ثانیاً شرط بالا لازم است زیرا چنانچه این دو معادله نمایش یك منحنی را بدهند باید بازاء هر مقدار y دارای ریشه های مساوی نسبت به x باشند و در نتیجه این دو کثیر الجمله که برحسب x در نظر گرفته شوند باید دارای ضرایبی

متناسب باشند . بهمین ترتیب اگر در این استدلال جای x و y را عوض کنیم خواهیم دید که باید کثیر الجمله ها متناسب و ضریب تناسب هم عدد ثابتی باشد .

منحنی های غیر جبری را ترانساندان نامند . معادله این منحنی‌ها را نمیتوان با هیچ نوع تبدیلی بصورت کثیر الجمله جبری درآورد .

٥٨ ـ معادلات پارا متری یك منحنی ـ طریقه دیگر نمایش‌دادن یك‌منحنی بصورت پارا متری میباشد . بدین منظور بازاء هر نقطه M منحنی یك عدد t که پارامتر آن نامیده میشود مربوط می کنیم . t را طوری انتخاب میکنند که تغییرپیوسته آن تغییر مکان پیوستهٔ جهت M نیز ایجاب نماید . وبالاخره اغلب اوقات این پارامتر معنای هندسی سادهٔ مثل طول منحنی الخط نقطه یا زاویه قطبی‌مماس وغیره خواهد داشت پس معادلات پارامتری منحنی را بصورت : $x = f(t) \quad y = g(t)$ (٤) میتوان نوشت . چنانکه منحنی مفروض‌باشد بینهایت معادلات پارامتری جهت نمایش آن میتوان داشت . هریك از آنها با تغییرپارامتر t به t' بطوریکه مثلا $t = \varphi(t')$ باشد از دیگری نتیجه میشود .

برای بدست آوردن معادله منحنی بصورت (١)کافی است t را بین دومعادله پارا متری حذف نمائیم .

٥٩ ـ معادله یك سطح ـ مختصات کارتزین x ، y ، z نقـاط مختلف سطح یارویه مفروض (S) مقادیر مستقل غیر مشخص نمیتوان داشته و بین آنها بستگی بصورت $f(x, y, z) = 0$ (٥) وجود خواهد داشت .

و بر عکس نقاطی از فضا را که مختصات آنها در بستگی (٥) صدق کنند در نظر میگیریم نقاطی که در صفحه x O' y موازی صفحه x O y هستند مکان نقاطی بارتفاع $OO' = h$ صفحه بوده‌وتشکیل‌منحنی C_h بمعادله $f(x, y, h) = 0$ (٦) رانسبت بمحورهای O' x و O' y میدهند . چنانکه h را تغییردهیم این‌منحنی‌تشکیل سطح (S) را خواهد داد .

پس بطور کلی معادله (٥) معادله سطح (S) خواهد بود چنانکه مختصات هر نقطه آن در این معادله صدق کرده و بر عکس هر نقطه که مختصات آن در (٥) صدق کند جزو سطح (S) میباشد .

تبصره ـ چنانکه f فقط بستگی به z داشته باشد استدلال بالا قابل‌قبول نبوده و در این حال نمایش صفحه موازی $x\,O\,y$ را خواهد داد .

چنانکه f بستگی فقط به x و y داشته باشد نمایش استوانهٔ موازی $O\,z$ را خواهد داد زیرا خطی موازی $O\,z$ سطح را در نقطه m منحنی C بمعادله $f = ٠$ قطع خواهد کرد . قاعده این استوانه منحنی (C) ومولدهای آن موازی $O\,z$ خواهند بود

سطوح جبری ـ سطح جبری سطحی است که معادله آن کثیر الجمله جبری از x و y و z باشد درجه این کثیر الجمله درجه سطح خواهد بود .

بهمان ترتیب که درباره منحنیات جبری گفتیم درجه سطح بستگی بمحورهای مختصات نداشته و قضیه های زیر در باره این سطوح ثابت میشوند .

قضیه ـ مقطع هر سطح جبری توسط صفحهٔ یك منحنی جبری هم درجه آن سطح خواهد بود .

قضیه ـ برای آنکه دو کثیر الجمله $f(x, y, z)$ و $g(x, y, z)$ که مساوی صفر قرار میدهیم نمایش یك سطح را بدهند لازم و کافی است که دارای جملات متناسب باشند .

اثبات این قضایا نظیر اثبات قضایای مربوطه در صفحه است .

٦٠ ـ معادلات پارا متری یك سطح ـ برای نمایش‌دادن یك سطح بصورت پارا متری بهر نقطه M سطح دو پارا متر u و v که مختصات منحنی‌الخط سطح نیز نامیده میشوند مربوط میکنیم .

در این حال مختصات M برحسب u و v نوشته شده ومعادلات سطح بصورت پارا متری $x = f(u, v) \quad y = g(u, v) \quad z = h(u, v)$ **(٧) در میآیند**

چنانکه u و v را بر حسب پارا متر دیگری مثلا t بیان کنیم معادلات حاصل نمایش منحنی (C) واقع روی سطح (S) را خواهند داد .

وهمچنین هررابطه بین u و v یك منحنی ازسطح (S) را نمایش خواهدداد

۶۱ - منحنی در فضا - برای نمایش منحنی (C) درفضا دوطریقه بکارمیرود

۱ - منحنی توسط مقطع دو سطح تعیین گشته است . منحنی (C) را مقطع دو سطح (S) و ('S) بمعادلات :

$$f(x, y, z) = 0 \qquad g(x, y, z) = 0 \qquad (۸)$$

فرض میکنیم .

در این حال معادلات (۸) منحنی (C) را در فضا نمایش داده ومعادلات آن میباشند

چنانکه منحنی (C) مفروض باشد بینهایت دستگاه معادله نمایش آنرا میدهند زیرا بینهایت سطح میتوان فرض نمود که بر این منحنی میگذرند .

۲ - منحنی از حرکت یك نقطه در فضا تعیین گشته است . در این حال بهر نقطه M پارا متر t را مربوط کرده و معادلات منحنی بصورت :

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t) \qquad (۹)$$

میباشد . چنانکه منحنی با معادلات (۸) نمایش داده شده باشد وبخواهیم آن معادلات را بصورت (۹) بنویسیم باید مثلا به x مقدار اختیاری $f(t)$ را داده و معادلات (۸) را نسبت به y و z حل نمائیم .

چنانکه در دستگاه (۹) دومعادله اول را درنظر بگیریم این دومعادله نمایش تصویر منحنی (C) فضائی را روی صفحه $x O y$ میدهند .

۶۲ - استوانه های تصویر کننده - بین سطوحی که بر منحنی مفروض میگذرند استوانه هائیکه روی آن تکیه کرده و بموازات محورهای مختصات میباشند جهت تصور کردن این منحنیات مفید میباشند . البته قاعدهٔ این استوانه ها روی صفحات مختصات تصاویر منحنی فضائی روی این صفحات بوده ومعادله استوانه همان معادله این منحنی مسطح خواهد بود . برای نوشتن معادله استوانه چنانکه $m(x', y')$ مختصات یك نقطه از قاعدهٔ آن باشد هر خط موازی $O z$ که براین نقطه بگذرد

منحنی فضائی (C) را دریك نقطه M قطع کرده و در نتیجه هر نقطه این خط دارای مختصات (x', y', z) میباشد پس معادلات :

$$f(x', y', z) = 0 \qquad g(x', y', z) = 0 \qquad (10)$$

دارای ریشه مشترك z که ارتفاع M است بوده و از آنجا نتیجه میشود که برای بدست آوردن معادله استوانه تصویر کننده منحنی (C) روی $x\,0\,y$ باید z را بین معادلات (۱۰) و یا بین معادلات (۸) منحنی حذف نموده و همچنین است در مورد استوانه های تصویر کننده دیگر روی صفحات $z\,0\,y$ و $z\,0\,x$

در صورتی که منحنی فضائی با معادلات (۹) نمایش داده شده باشد چنانکه گفتیم دو معادله اول آن دستگاه نمایش معادلات پارا متری تصویر آن روی $x\,0\,y$ بوده وازآنجا نتیجه میشود که برای نوشتن معادله استوانه تصویر کننده روی $x\,0\,y$ کافی است که t را بین این دو معادله حذف کنیم .

باید یادآور شد که اغلب نمیتوان معادلات دوازاین استوانه‌ها را بجای معادلات منحنی گرفت زیرا علاوه بر (C) این استوانه ها دارای مقاطع دیگری نیز خواهند بود

۶۳ ـ منحنی جبری ـ چنانکه بتوان بر یك منحنی فضائی دو سطح جبری مرور داد آن منحنی را جبری گویند .

قضیه ـ تصاویر یك منحنی جبری جبریند وبرعکس . اثبات این قضیه برحسب تعاریف فوق واضح میباشد زیرا مثلا اگر z را بین معادلات (۸) حذف کنیم معادله حاصل جبری خواهد بود .

درجه یك منحنی جبری درفضا عدهٔ نقاط برخورد آن با یك صفحه غیرمشخص می باشد .

قضیه ـ مقطع دو سطح جبری با درجات m و p یك منحنی جبری از درجه $m\,p$ میباشد .

زیرا عدهٔ نقاط برخورد دو منحنی مسطح ازدرجات m و p مساوی $m\,p$ است

و این نقاط همان نقاط برخورد منحنی مقطع دو سطح بایك صفحه میباشند .

۶۴ ـ خم ها و سطوح موهومی ـ همانطورکه نقاط موهومی جهت تعمیم قضایا بکارمیروند بهمان ترتیب بررسی منحنیات وسطوح موهومی لازم‌میباشد . واینها بدو صورت دیده میشوند .

حالت اول ـ معادلات این خم ها و یا این سطوح دارای ضرایب حقیقی بوده ولی مختصات هیچ نقطه حقیقی درآنها صدق نمیکنند . دراین حال‌نقاط موهومی‌این خمها و سطوح دو بدو مزدوج میباشند .

حالت دوم ـ معادلات این خمها و یا این سطوح با ضرایب موهومی میباشند در این حال اگر سطح موهومی باشد یك منحنی حقیقی روی آنها وجود دارد .

۶۵ ـ بررسی نا مساویها ـ هندسه تحلیلی‌بما اجازه میدهدکه نا مساویهای دو و سه مجهولی را از لحاظ هندسی بررسی نمائیم اینك حالت دو مجهولی را در نظر میگیریم .

فرض کنیم نا مساوی $f(x,y) > 0$ (۱۱) داده شده باشد میخواهیم به‌بینیم مختصات چه نقاط ازصفحه دراین نامساوی‌صدق میکنند . بدین منظورمنحنی $f(x,y) = 0$ (۱۲) را رسم نموده می‌بینیم‌که این منحنی صفحه را بنواحی‌چند تقسیم مینماید هریك از این نواحی طوریست که میتوان از یك نقطه واقع در آن خطی بنقطه دیگر همان ناحیه بدون آنکه منحنی را قطع نمایدکشید. بآسانی‌ثابت میشود که **تمام نقاط یك ناحیه (R) یك علامت معینی به f میدهند** . زیرا مثلا فرض کنیم که دو نقطه P و P' واقع در یك ناحیه دو علامت مخالف به f بدهند . این دو نقطه‌را با خطی‌بهم مربوط کرده بطوریکه این خط منحنی (C) را قطع ننماید چنانکه M از P به P' برود مختصات آن توابع پیوسته از t بوده و این پارامتر از t_0 به t_1 ترقی مینماید درنتیجه $f(x,y)$ تابع پیوسته از t شده وبازاء مقادیر t_0 و t_1 دومقدار مختلف العلامه خواهد داشت پس لازم میآیدکه درفاصله بین این دومقدار

صفر شود یعنی دریك نقطه ازخط $P\ M\ P'$ تابع f صفرخواهد شد واین خلاف فرض است زیراکه خط مزبور منحنی (C) را قطع نمینماید .

دو ناحیه را مجاور هم گوئیم چنانکه بتوانیم ازیکی بدیگری بطوریکه فقط یك دفعه از منحنی (C) بگذریم برویم . دو ناحیه مجاور هم دو علامت مختلف به f خواهند داد . زیرا چنانکه از (C) عبور کنیم f صفر شده و تغییر علامت میدهد .

پس از این مقدمه نقطهٔ در صفحه دریکی از این نواحی انتخاب کرده چنانکه $f(x_0 , y_0)$ مثبت باشد آن ناحیه مثبت و نواحی مجاور آن منفی خواهند بود . و باین ترتیب نواحی از صفحه که در نا مساوی فوق صدق میکنند تعیین میشوند .

در مورد نا مساویهای سه مجهولی $f(x , y , z) > 0$ سطح $f(x , y , z) = 0$ را در فضا در نظر گرفته و نظیر آنچه که در بالا گفتیم عمل میکنیم .

بخش چهارم

مکان هندسی

۶۶ ـ درصفحه ـ مکان هندسی مجموع نقاطی از صفحه را گویند که دارای خاصیت مشترك باشند.

طبق این تعریف برای آنکه مکان هندسی مطلوب (L) منحنی (C) باشد باید دو موضوع زیر را ثابت نمود .

۱ ـ هر نقطه از مکان هندسی (L) روی منحنی (C) واقع بوده .

۲ ـ و برعکس هر نقطه از منحنی (C) خاصیت مکان (L) را دارا میباشد .

برای تعیین مکان هندسی بطریق تحلیلی باید قبل ازهرچیز محورهای مختصات را انتخاب نمود و باید یادآورشد که سهولت محاسبه بستگی تام بانتخاب محورهای مختصات دارد .

۶۷ ـ میخواهیم معادلات پارا متری مکان را پیدا نمائیم ـ بدین منظور

نقطه M مکان را در نظر گرفته و پارا متری را نیز انتخاب میکنیم این پارامتر اغلب اوقات معنای هندسی سادهٔ داشته ومختصات M را مستقیماً نسبت بآن حساب میکنیم

۶۸ ـ میخواهیم معادله مکان را بنویسیم ـ طریقه مستقیم ـ نقطه $M(x, y)$ غیر مشخص درصفحه را گرفته وشرط لازم وکافی برای آنکه این نقطه متعلق بمکان باشد مینویسیم بدین ترتیب معادلهٔ بین x و y که معادله مکان است بدست میآید .

طریقه غیر مستقیم ـ درمواردیکه طریقه مستقیم قابل عمل نباشد این طریقه را میتوان بکار برد . پارامتر λ را طوری انتخاب میکنیم که بازاء هر مقدار آن یك نقطه از مکان مربوط باشد چنانکه عملیاتی را که برای بدست آوردن آن نقطه بکار میرود از نظر تحلیلی بیان کنیم دو معادله که بپارامتر λ بستگی دارند خواهیم داشت

$$f(x, y, \lambda) = 0 \qquad g(x, y, \lambda) = 0 \qquad (1)$$

ریشه های این دو معادله مختصات نقاط مربوط به پارامتر λ را بما میدهند .

میتوان همچنین مکان را نقاط برخورد دودسته منحنی که به پارامتر λ بستگی دارند دانست . این دو دسته منحنی را (C) و (C') گرفته و برای بدست آوردن معادله مکان λ را بین این دو معادله حذف میکنیم .

برای اثبات این موضوع معادله $R(x, y) = 0$ (۲) را نتیجه حذف پارامتر گرفته گوئیم :

۱ ـ هر نقطه مکان در معادله (۲) صدق میکند زیرا چنانکه مختصات x و y آنرا در معادلات (۱) گذاریم این معادلات یك ریشه مشترك λ لااقل خواهند داشت این ریشه λ پارا متر مربوط به خمهای (C) و (C') که از آن نقطه میگذرند خواهد بود .

۲ ـ هر نقطه که مختصات آن در (۲) صدق کند یك نقطه از مکان میباشد زیرا چنانکه مختصات آنرا در (۱) گذاریم این معادلات یك ریشه مشترك λ خواهند داشت و باین ریشه یك منحنی (C) و یك منحنی (C') که از آن نقطه میگذرند

مربوط میباشند . پس این نقطه متعلق بمکان خواهد بود .

۶۹ ـ جوابهای خصوصی ـ با بکاربردن این‌طریقه بعضی اوقات ریشه هائی که جوابهای خصوصی نامیده میشوند پیدا خواهند شد .

فرض کنیم که بازاء $\lambda = \lambda_0$ خطوط (C) و (C') برهم منطبق شده ویا لااقل یك جزء مشترك (S) داشته باشند مختصات هر نقطه (S) در (۲) صدق کرده زیرا بازاء یك مقدار $\lambda = \lambda_0$ در معادلات (۱) صدق میکنند . پس در این حال لازم میآید که $R(x, y)$ لااقل بدوعامل بطوریکه‌اگریکی ازآنها را مساوی صفر قرار دهیم نمایش (S) را بدهند تجزیه شود . چنانکه مکان را ازمجموع نقاط مشترك دو منحنی (C) و (C') فرض کنیم نمیتوان گفت که (S) جزو مکان نمیباشد ولی در هر حال جزئی از آنست که بجواب خصوصی نامیده میشود .

۷۰ ـ جوابهای اضافی ـ همچنین ممکن است که در $R(x, y)$ عوامل اضافی پیدا شوند بطوریکه هر نقطه مختصاتش آن عامل را صفر کند ولی بازاء همان مختصات معادلات (۱) ریشه مشترکی برحسب λ نداشته باشند . منحنی مربوطه جزو مکان نبوده و چنین ریشهٔ جواب اضافی یا خارجی نامیده میشود . این عوامل همیشه از محاسبات حذف پارامتر پیدا شده و برای شناختن جوابهای صحیح از جوابهای مخصوص و اضافی بطریق زیر باید عمل نمود :

چنانکه $R(x, y)$ بچند عامل تجزیه شد هریك ازعواملرا جداگانه مساوی صفر گرفته و (A) را منحنی نمایش دهنده یکی از آنها فرض میکنیم . مختصات x و y یکی ازنقاط M این منحنی را در (۱) گذارده وریشه مشترك λ آن دومعادله را پیدا میکنیم . چنانکه این‌ریشه مشترك موجود نباشدآن عامل‌اضافی‌است چنانکه λ وجود داشته ولی با تغییر x و y نقطه M تغییر ننماید آن عامل خصوصی و بالاخره چنانکه ریشه مشترك معادلات (۱) با تغییر M روی (A) تغییر نماید آن عامل و منحنی نمایش دهنده آن (A) جزء مکان خواهند بود .

۷۱ - طریقه چند پارامتری - دربعضی موارد پیدا کردن یك پارامتر λ آسان نبوده و میتوان بجای آن چند پارامتر مثلا m بکار برده و معادلات (۱) را بر حسب آنها بیان نمود. البته برای آنکه فقط یك پارامتر مستقل وجود داشته باشد بایدکه تمام آنها توسط ۱ — m رابطه بهم مربوط باشند. برای بدست آوردن معادله مکان باید پارامترها را بین این ۱ — m معادله و دو معاله (۱) حذف نمائیم.

۷۲ - مقایسه دو طریقه - چنانکه دیدیم دو طریقه نوشتن معادلات مکان بصورت پارامتری و طریقه غیر مستقیم برای نوشتن معادله مکان تا بدست آوردن معادلات (۱) هر دو یکی بوده چنانچه λ را حذف کنیم معادله مکان وچنانچه x و y را برحسب λ بیان کنیم معادلات پارامتری را خواهیم داشت. چنانکه حذف پارامتر غیر عملی بنظر برسد باید همیشه x و y را برحسب پارامتر نوشت.

تبصره - اگر منحنیهای (C) و (C') بستگی به بیشتر از یك پارامتر مستقل داشته باشند مکان وجود نداشته زیرا دراین حال ازهر نقطه صفحه دومنحنی میتوان مرور داد ولی بطور استثناء ممکن است که مکان وجود داشته باشد و این موضوع را بدین ترتیب میتوان توجیه نمود که همیشه ممکن است دو دسته بینهایت منحنی فرض نمود که بر منحنی ثابتی گذشته باشند و این منحنی مکان مطلوب باشد.

۷۳ - مکان هندسی در فضا - درفضا عامل مولد مکان هندسی ممکن است خواه نقطه خواه منحنی باشد در حالت اول مکان ممکن است منحنی یا سطح و در حالت دوم همیشه یك سطح خواهد بود. انتخاب محور های مختصات قبل ازهرچیز لازم بوده و طرز عمل نظیر مکانهای هندسی در صفحه میباشد.

مثلاچنانکه منحنی فضائی بستگی به پارامتری داشته باشد برای بدست آوردن مکان مطلوب که دراین حال سطح است پارامتررا بین دومعادله منحنی حذف میکنیم چنانکه معادله منحنی بصورت پارامتری:

$$x = f(t, \lambda) \qquad y = g(t, \lambda) \qquad z = h(t, \lambda)$$

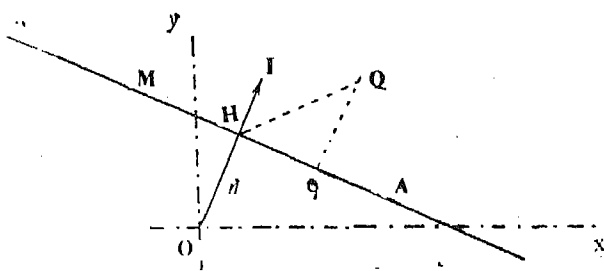
داده شده باشد باید z و t را بین این معادلات حذف نموده ویا آنکه میتوان این معادلات را معادلات پارامتری سطح (S) فرض نمود .

بخش پنجم

خط در صفحه

۷۴ ـ معادله خط مستقیم ـ در صفحه دو محور قائم Ox و Oy فرض کرده بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ را روی آنها انتخاب میکنیم . نقطه M را بمختصات x و y گرفته قضیه زیر را ثابت میکنیم .

قضیه ـ هر خط مستقیم (D) را میتوان بصورت یك معادله درجه اول از x و y نمایش داده و بر عکس هر معادله درجه اول از x و y نمایش یك خط مستقیم را میدهد .

طریقه حاصل ضرب داخلی ـ فرض میکنیم خط (D) از نظر هندسی تعیین گشته معادله آن را می نویسیم و بعد بر عکس این قضیه یعنی یك معادله درجه اول فرض کرده ثابت میکنیم که نمایش یك خط مستقیم را میدهد .

ش ٢٦

قسمت اول ـ خط (D) را که از نقطه A بمختصات (x_0 , y_0) میگذرد و عمود به بردار $\vec{n}$ که تصاویر آن (u , v) است گرفته شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه $M(x , y)$ روی (D) باشد آنست که بردار $\overrightarrow{OM}$ در رابطه برداری

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} \qquad (١)$$

صدق کند .

اثبات این بستگی پس از تفسیر هندسی حاصل ضرب داخلی واضح بوده زیرا طرفین معادله مساوی $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OH}$ میباشند.

چنانکه این رابطه را بصورت کارتزین بنویسیم: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = ux + vy$ بوده و پس از قرار دادن: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = ux_0 + vy_0 = -w$ معادله بصورت $ux + vy + w = 0$ (۲) که معادلهٔ از درجه اول است در خواهد آمد.

قسمت دوم - بر عکس معادله درجه اول $ux + vy + w = 0$ را که در آن u و یا v صفر نباشند فرض کرده (u, v) را تصاویر بردار $\vec{n}$ میگیریم حال گوئیم مکان نقاط M که مختصات آنها در این رابطه صدق میکنند همان مکان نقاط M است که در بستگی برداری: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} + w = 0$ صدق کنند.

این مکان خط (D) عمود به بردار $\vec{n}$ در نقطه H بطوریکه: $\overrightarrow{OH} \cdot \vec{n} = -w$ باشد خواهد بود.

تبصره - فاصله نقطه از خط - چنانکه X و Y را مختصات نقطه‌غیرمشخص Q درصفحه بگیریم و q را تصویر Q روی (D) فرض کنیم طرف اول معادله (۲) مساوی: $uX + vY + w = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OQ} - \vec{n} \cdot \overrightarrow{OH} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{HQ}$ شده و از آنجا: $\overline{qQ} = \dfrac{uX + vY + w}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ خواهد شد زیرا $\overline{qQ}$ تصویر $\overrightarrow{HQ}$ روی $\vec{n}$ میباشد. طرف اول این تساوی فاصله نقطه Q از خط (D) بوده و سوی اندازه گیری آن سوی مثبت $\vec{n}$ و یا از جهت خط بسمت نقطه است.

طریقه حاصل ضرب خارجی - خط (D) را که از نقطه $A(x_0, y_0)$ میگذرد موازی بردار $\vec{a}(p, q)$ فرض کرده شرط لازم وکافی برای آنکه نقطه $M(x, y)$ روی (D) باشد آنستکه بردار $\overrightarrow{OM}$ در بستگی برداری:

$$(٣) \quad \vec{a} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{a} \wedge \overrightarrow{OA}$$

صدق کند چنانکه این بستگی را بصورت کارتزین بنویسیم بستگی :

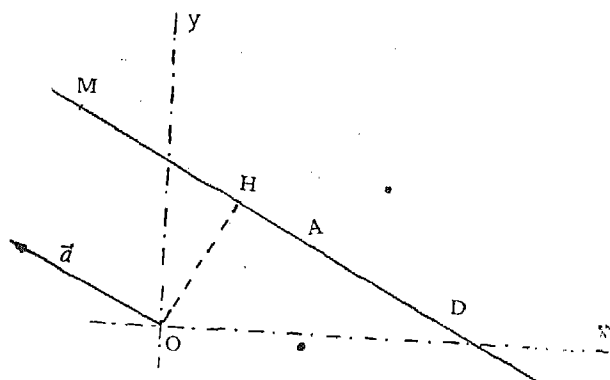
$$p\,y - q\,x = p\,y_0 - q\,x_0 \qquad (٤)$$

که بصورت $u\,x + v\,y + w = 0$ است پس از قرار دادن :

$$u = q \qquad v = -p \qquad w = p\,y_0 - q\,x_0$$

بدست خواهد آمد.

و بر عکس معادله درجه اول : $u\,x + v\,y + w = 0$ را فرض کرده بردار $\vec{a}$ را با تصاویر : $(-v, u)$ گرفته گوئیم مکان نقاط M

ش ۲۷

که مختصات x و y آنها دراین معادله صدق‌میکنند همان مکان M است که درمعادله برداری $\vec{a} \wedge \vec{OM} = w\,\vec{k}$ صدق کند $\vec{k}$ را بردار یکه عمود مستقیم بصفحه میگیریم و یا میتوان گفت که معادله را بصورت برداری نوشته ایم . حال در روی Oz که عمود مستقیم به $\vec{a}$ فرض شده است نقطه H را بترتیبی که :

$$\overline{OH} = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{و یا} \quad \overline{OH}\left|\vec{a}\right| = w$$

باشد انتخاب کرده خط (D) را موازی $\vec{a}$ رسم میکنیم واین همان خط مطلوب است

همچنین میتوانستیم بستگی حاصل از تناسب تصاویر $\vec{a}$ و $\vec{AM}$ را بنویسیم : $\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}$ و این همان معادله (٤) میباشد . چنانکه p را مخالف صفر فرض کرده و ضریب زاویه خط یعنی $m = \frac{q}{p}$ را حساب کنیم می بینیم که این مقدار مساوی $-\frac{u}{v}$ خواهد شد . معادله خط در این حال بصورت : $y = m\,x + n$

پس از قرار دادن $n = y_0 - \frac{q}{p}x_0$ نوشته میشود .

۷۵- معادله نرمال خط مستقیم - برای آنکه دو معادله :

$$u x + v y + w = 0$$
$$u' x + v' y + w' = 0$$

نمایش یك خط مستقیم را بدهند لازم و کافی است که ضرایب آنها باهم متناسب باشند . یعنی : $\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} = \frac{w'}{w}$ باشد .

اثبات : چنانکه دو معادله نمایش یك خط مستقیم را بدهند طبق طریقه اول دو بردار :

$$\vec{n} = u \cdot \vec{i} + v \vec{j} \quad \text{و} \quad \vec{n'} = u' \vec{i} + v' \vec{j}$$

موازی بوده و از آنجا : $u' = \lambda u$ و $v' = \lambda v$ و یا : $\vec{n'} = \lambda \vec{n}$

خواهد شد . از طرفی چنانکه A نقطهٔ از (D) باشد .

$$w = -\vec{n} . \vec{OA} \qquad w' = -\vec{n'}\, \vec{OA} = -\lambda (\vec{n}\ \vec{OA}) = \lambda w$$

بوده و از آنجا نتیجه میشود که u' و v' و w' حاصل ضرب u و v و w در یك ضریب λ میباشند .

وارون این قضیه واضح میباشد زیرا چنانکه تمام ضرایب یك معادله خطی را در λ ضرب کنیم ریشه های آن معادله تغییر نکرده و در نتیجه خطیکه نمایش آنرا میدهد تغییر نخواهد کرد .

چنانکه ضریب تناسب را طوری انتخاب کنیم که :

$$u^2 + v^2 = 1 \quad \text{و یا :} \quad \vec{n}^2 = 1$$

باشد معادله (۱) بصورت : $\vec{n} . \vec{OM} = \overline{OH}$ در آمده و چنانکه ملاحظه کنیم که: تصاویر $\vec{n}$ کوسینوسهای هادی میباشند صورت کارتزین معادله فوق :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + w = 0$$

خواهد شد این معادله معادله نرمال خط نامیده شده و دراین حال $(\widehat{Ox, \vec{n}}) = \alpha$ میباشد

فاصله یك نقطه ازخط در این حال $d = X \cdot cos\ \alpha + y \cdot \alpha + w$. است .

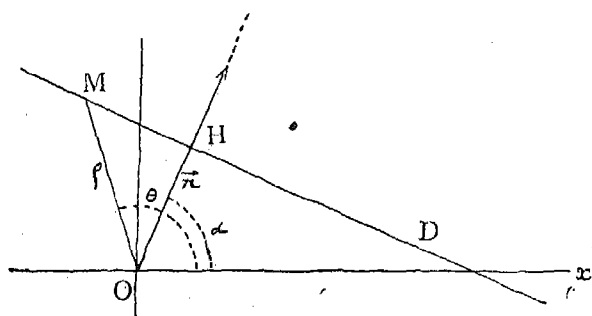
هرخط دومعادله نرمال که بزوایای α و $\pi + \alpha$ مربوطند دارا میباشد .

۷۶ ـ معادله قطبی خط مستقیم ـ چنانکه Ox را محور قطبی و (r, α) را مختصات قطبی بردار $\vec{n}$ و (ρ, θ) را مختصات قطبی نقطه M بگیریم هریك ازمعادلات برداری (۱) و(۳) را میتوان بصورت قطبی نوشته واز آنجا معادله قطبی خط مستقیم را خواهیم داشت : مثلا معادله برداری (۱) بصورت :

$$r \cdot \rho \cdot cos\ (\theta - \alpha) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA}$$

و یا :

$$\rho \cdot cos\ (\theta - \alpha) = p$$

که در آن p مقدار ثابتی و مساوی $\overline{OH}$ یعنی فاصله مبداء از خطاست نوشته‌میشود. میتوان همچنین این معادله را از تبدیل

ش ۲۸

معادله کارتزین خط با استفاده از دستور های تبدیل مختصات بدست آورد .

چنانکه این معادله‌را بسط دهیم بصورت: $\rho = \frac{1}{a\ cos\ \theta + b\ sin\ \theta}$ نیز نوشته میشود .

۷۷ ـ خطوط موازی ـ قضیه ـ شرط لازم و کافی برای آنکه دو معادله :

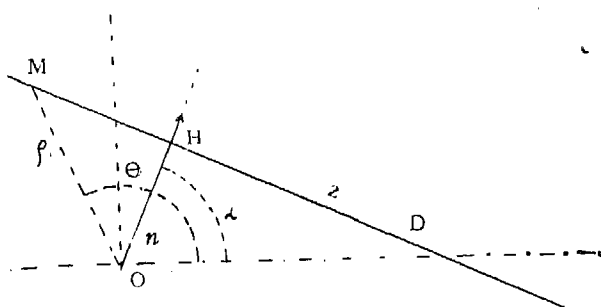
$$u\ x + v\ y + w = 0$$
$$u'\ x + v'\ y + w' = 0$$

نمایش دوخط موازی را بدهند آنستکه ضرایب x و y آنها متناسب باشند .

اثبات ـ برای آنکه دو خط موازی باشند لازم و کافی است که ضریب زاویه های آنها یا مساوی و یا هردو بینهایت باشند . زیرا ضریب زاویه هرخط یك امتداد را فقط برای آن تعیین میکند و برعکس هرامتداد فقط یك ضریب زاویه‌خواهد داشت

و بس . حال چنانکه دیدیم دو ضریب زاویه این دو خط بترتیب : $\frac{u}{v}$ — و $\frac{u'}{v'}$ —
بوده پس شرط فوق بصورت : $\frac{u'}{v'} = \frac{u}{v}$ و یا : $\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v}$ و یا :
$u' = \lambda u$ و $v' = \lambda v$ $(\lambda \neq 0)$ نوشته میشود .

میتوان این شرط را بصورت : $u'x + v'y = \lambda(ux + vy)$ نیز نوشت .

تبصره ۱ — معادله $ux + vy + h = 0$ که در آن h پارامتر متغیر یست معادله عمومی تمام خطوط موازی خط $ux + vy + w = 0$ میباشد زیرا نمایش خطوط موازی آن خط را داده وازطرفی h را میتوان طوری تعیین کرد که ازهر نقطه x_0 و y_0 صفحه نیز بگذرد . و بخصوص خط موازی خط فوق که از مبداء مختصات بگذرد بمعادله : $ux + vy = 0$ خواهد بود . یعنی چنین نتیجه میشود که: برای بدست آوردن خط موازی خط مفروض که ازمبداء مختصات بگذرد بایستی در معادله آن خط مقدار ثابت را صفر نمود .

ش ۲۹

تبصره ۲ — ازآنچه گفته شد نتیجه میشود که برای بدست آوردن پارامترهای هادی خط $ux + vy + w = 0$ کافی است که مختصات یکنقطه C خط $ux + vy = 0$ موازی آنرا بگیریم . مثلا مختصات نقطه $a = -v$ و $b = +u$ و یا نقطه بمختصات $a = +v$ و $b = -u$ دراین معادله صدق کرده و از آنجا این اعداد را میتوان پارامتر های هادی خط گرفت .

همچنین ازآنجا نتیجه میشود که شرط آنکه خط (D) $ux + vy + w = 0$ موازی امتدادی بپارامترهای هادی (a, b) باشد آنستکه : $ua + vb = 0$ باشد .

۷۸ - خطوط مخصوص - معادله محور x ها $y=0$ میباشد زیرا ضریب زاویه آن صفر بوده و معادله هرخط موازی محور x ها $y=c$ میباشد.

محور y ها دارای معادلهٔ $x=0$ بوده ضریب زاویه اش بینهایت $(m=\frac{y}{x}=\frac{y}{0}=\infty)$ و معادله هر خط موازی آن : $x=c$ میباشد.

نیمساز اول یا نیمساز زاویه بین قسمتهای مثبت محور ها بمعادله : $x=y$ و ضریب زاویه اش ۱ میباشد معادله هرخط موازی آن بصورت: $y-x=c$ خواهد بود.

نیمساز دوم دارای معادلهٔ $y=-x$ و ضریب زاویه اش ۱- و معادلهٔ هر خط موازی آن $y+x=c$ خواهد بود.

۷۹ - رسم خطیکه معادله آن داده شده باشد - برای رسم هرخط داشتن دو نقطه آن کافی بوده و برای سهولت دو نقطه از آنرا که واقع روی محورها باشند مختصاتشان را حساب میکنیم نقطه واقع روی Ox از صفر کردن y در معادله و حل آن نسبت به x بدست میآید. و همچنین نقطه روی Oy از صفر کردن x در معادله بدست میآید. مثلا اگر معادله بصورت : $y=mx+n$ باشد n عرض نقطه واقع روی Oy بوده و آنرا عرض از مبداء نامند.

چنانکه خط از مبداء مختصات بگذرد کافی است که نقطهٔ از آنرا پیدا نمائیم یعنی یك مقدار به x داده مقدار y مربوطه را پیدا کنیم.

۸۰ - نواحی مثبت و منفی یك خط - خط (D) رافرض کرده این خط صفحه را بدو ناحیه مثبت و منفی تقسیم مینماید برحسب آنکه مختصات یکی از نقاط این نواحی معادله را مثبت یا منفی کند آن ناحیه مثبت یا منفی خواهد بود.

همچنین باید ملاحظه کرد که چنانکه از نقطه M_0 خط (D)، بردار $\overrightarrow{M_0M}$ را با تصاویر (u, v) مرور دهیم این بردار در ناحیه مثبت واقع خواهد شد زیرا که مختصات M بترتیب x_0+u و y_0+v بوده و چنانکه این مقادیر را بجای x و y در معادله خط نهیم : $(ux_0+vy_0+w)+(u^2+v^2)=u^2+v^2$

خواهد شد پس چنانکه می بینیم نتیجه مثبت میباشد .

٨١ - معادله پارامتری خط مستقیم - میتوان مستقیماً معادله پارامتری خط را نوشت . فرض کنیم که خط (D) از نقطه ($M_0 (x_0 , y_0)$ گذشته و دارای کوسینوسهای هادی (p , q) باشد . چنانکه ($M (x , y)$) را یکی از نقاط غیر مشخص خط و $\rho = M_0M$ را پارامتر بگیریم از تصویر $\overrightarrow{M_0 M}$ روی محور ها بستگی های :

$$x - x_0 = \rho p \qquad y - y_0 = \rho q$$

بدست آمده ودر نتیجه :

$$x = x_0 + \rho p \qquad y = y_0 + \rho q$$

خواهند شد . چنانکه p و q کوسینوسهای هادی نباشند دستور ها همان بوده و فقط در اینحال : $\rho = \dfrac{\overrightarrow{M_0 M}}{\overrightarrow{a}}$ که‌درآن‌بردار $\overrightarrow{a}$ بتصاویر (p , q) است‌خواهد بود. دستور های فوق را میتوان بصورت زیر نیز نوشت :

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi \qquad y = y_0 + \rho \sin \varphi$$

در این دستور ها φ زاویه قطبی خط فرض شده است .

چنانکه خط (D) توسط دو نقطه ($M_1 (x_1 , y_1)$ و ($M_2 (x_2 , y_2)$ تعیین شده باشد میتوان نسبت تصاویر دو بردار $\overrightarrow{M_1 M}$ و $\overrightarrow{M M_2}$ را مساوی پارامتر λ گرفت در اینصورت معادلات پارامتری خط چنین خواهند شد :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda$$

از آنجا : $\qquad y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ میشوند .

در اینحال λ مربوط بنقاط M_1 و M_2 و بینهایت و نقطه وسط $M_1 M_2$ بترتیب 0 ، ∞ و -1 و $+1$ خواهند بود .

٨٢ - خط بینهایت - خطوط موهومی - معادله خط مستقیم در مختصات همگن بصورت : $u X + v Y + w T = 0$ بوده چنانکه معادله $T = 0$ را در نظر بگیریم این معادله بهمان صورت بوده و گوئیم نمایش یك‌خط را میدهد . معادله‌اخیر

از نظر هندسه معنائی نداشته ولی از نظر تحلیلی بنا بتعریف گوئیم نمایش یك خط را میدهد . این خط مکان نقاط بینهایت صفحه بوده و از اینجهت آنرا خط بینهایت صفحه نامند .

همچنین میتوان این خط را حد خطی دانست که نقاط برخورد آن بامحورها و در نتیجه تمام خط به بینهایت رود . ولی با وجود تمام این حالات ما این خط را نظیر خطوط معمولی صفحه فرض کرده ومثلا گوئیم که نقاط بینهایت یك منحنی غیر مشخص نقاط برخورد آن با خط بینهایت میباشند ـ باید همچنین یاد آور شد که امتداد این خط غیر مشخص میباشد زیرا کـه ضریب زاویه آن $m = -\frac{u}{v}$ بصورت $\frac{0}{0}$ است .

خط موهومی خطی است که لااقل یکی از ضرایب معادله آن موهومی باشد. معادله آنرا میتوان بصورت $P + iQ = 0$ نوشت . Q, P توابع خطی حقیقی بوده و برای آن نتایج زیر را میتوان یاد آور شد :

قضیه ۱ـ هر خط موهومی دارای یك نقطه حقیقی میباشد . این نقطه محل برخورد خطوط $P = 0$ و $Q = 0$ خواهدبود. این نقطه نیز ممکن است در بینهایت باشد.

قضیه ۲ـ دو خط موهومی مزدوج دریك نقطه حقیقی برخورد میکنند .

قضیه ۳ـ خطیکه دو نقطه موهومی مزدوج را بهم وصل نماید حقیقی خواهدبود.

مسائل مربوط بخط مستقیم

۸۳ـ معادله خطیکه از یك نقطه میگذرد ـ میخواهیم معادله کلی خطوطیکه از نقطه $M_0(x_0, y_0)$ میگذرند بنویسیم . معادله خط را بصورت: $ux + vy + w = 0$ گرفته شرط آنکه این خط از نقطه مفروض بگذرد آنستکه $ux_0 + vy_0 + w = 0$ باشد چنانکه این دومعادله را ازهم کم نمائیم معادله خطیکه از نقطه مفروض میگذرد خواهیم داشت : $u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0$ معادله مطلوبست .

در این معادله v و u غیر مشخص میباشند . چنانکه ضریب زاویه را دخالت دهیم معادله بصورت : $y - y_0 = m(x - x_0)$ نوشته خواهد شد .

از آنچه که گفته شد نتیجه میشود که معادله خطیکه از نقطه M_0 عمود به امتدادی با کوسینوسهای هادی p و q باشد چنین است :

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = 0$$

چنانکه زاویه قطبی امتداد (p, q) را دخالت دهیم معادله :

$(x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi = 0$ را خواهیم داشت .

و نیز معادله پارامتری خطیکه از نقطه M_0 مرور کرده و عمود بخط $ux + vy + w = 0$ باشد : $x = x_0 + \rho u$ خواهد بود .

$$y = y_0 + \rho v$$

۸۴ - معادله عمومی خطوطیکه از محل برخورد دو خط میگذرند - دسته خط - چنانکه نقطه M_0 از برخورد دوخط $P = 0$ و $Q = 0$ بدست آمده باشد محاسبه مختصات آن لزومی نداشته ومیتوان مستقیماً معادله خطوط مفروض را نوشت این معادله :

(۵) $P + \lambda Q = 0$ که در آن λ پارامتر متغیری است میباشد .

اولاخط $P + \lambda Q = 0$ از نقطه M_0 میگذرد زیرا که مختصات این نقطه P و Q را صفرمیکنند. ثانیاً این معادله نمایش هرخط Δ راکه‌ازنقطه M_0 بگذرد خواهد داد . زیرا اگر نقطه دیگر M_1 را روی آن انتخاب کنیم برای آنکه این خط از این نقطه بگذرد بایستی که : $P_1 + \lambda Q_1 = 0$ باشد . از اینجا λ را بدست آورده و در نتیجه‌معادله خط کاملامشخص‌خواهدشد وچون این‌خط دو نقطه مشترك با Δ M_0 دارد پس منطبق برآن خواهد شد .

اثبات فوق در حالیکه $Q_1 = 0$ باشد یعنی موقعی که Δ M_0 منطبق بر Q باشد قابل قبول نبوده ولی میتوان در این حال $\lambda = 0$ گرفت .

برای از بین بردن نقص فوق میتوان معادله $P + \lambda Q = 0$ را بصورت همگن $\lambda P + \mu Q = 0$ (٦) نوشت : در این حال خط Q ازقراردادن $\lambda = 0$ بدست میآید . معادله خط مطلوب درهردو صورت چنانکه M_0 نیز دربینهایت باشد قابل قبول است و خط حاصل موازی دو خط P و Q دراینحال خواهد بود .

معادلات (٥) یا (٦) را معادلات نمایش دهنده یك دسته خط نامند . نقطه M_0 را نقطه مبنای دسته نامند .

قضیه ـ چنانکه معادله خطی دارای پارامتری از درجه اول باشد آن خط از نقطه ثابتی خواهد گذشت .

اثبات ـ چنانکه معادله را نسبت به پارامتر λ مرتب کنیم معادله حاصل بصورت (٥) بوده و در نتیجه خط از نقطه ثابتی که ازصفر کردن ضریب λ و مقداری که بآن بستگی ندارد بدست آمده است خواهد گذشت .

٨٥ ـ دسته خطوطیکه از مبداء مختصات میگذرند ـ قضیه ـ هر معادله جبری همگن از x و y و از درجه p نمایش p خط مستقیم را که از مبداء مختصات میگذرند خواهد داد .

معادله $f(x, y) = 0$ را فرض کرده چنانکه آنرا بر x^p تقسیم کنیم نتیجه میشود : $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0$

چنانکه قرار دهیم : $\frac{y}{x} = m$ بصورت : $f(1, m) = 0$ درآمده این معادله جبری واز درجه p خواهد بود پس دارای p ریشه $m_1, m_2, \dots, m_p$ میباشد . برای آنکه مختصات یك نقطه در معادله اخیر صدق کند لازم و کافی است که در یکی از معادلات :

$$y = m_1 x, \quad y = m_2 x, \dots, \quad y = m_p x$$

نیز صدق کند . حال این معادلات نمایش p خط را که از مبداء مختصات میگذرند داده و از آنجا قضیه ثابت میشود .

تبصره - قضیه بالا موقعی صادق است که خطوط موهومی مربوط بریشه های موهومی معادله نیز حساب شوند و همچنین ریشه های مکرر از مرتبه α را α خط در نظر بگیرند.

گاهی اتفاق میافتد که درجه معادله $f(1,m)=0$ باندازهٔ q واحد کمتر میشود واین برای آنست که $f(x,y)$ دارای x^q درفاکتر میباشد. پس معادله : $f(x,y)=0$ بازاء $x=0$ برقرار بوده و درنتیجه دسته خط مربوطه شامل محور Oy که بایستی q دفعه حساب شود خواهد بود.

معادله : $f(1,m)=0$ معادله ضریب زاویه‌های خطوط دسته بوده و برای بدست آوردن آن بایستی در معادله داده شده $x=1$ و $y=m$ نمود.

۸۶ - دسته دوخطی که ازمبداء مختصات میگذرد - چنین دسته دارای معادله بصورت : $Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$ بوده . معادله ضریب زاویه ها : $Cm^2+2Bm+A=0$ خواهد شد. شرط آنکه دوخطیکه توسط این معادله نمایش داده میشوند حقیقی باشند آنستکه $AC-B^2\leqslant 0$ باشد. برای آنکه این دو خط بهم عمود باشند بایستی که حاصل ضرب ضریب زاویه های آنها مساوی ۱ - باشد حال این حاصل ضرب مساوی : $\frac{A}{C}$ و در نتیجه شرط مزبور : $\frac{A}{C}=-1$ و یا $A+C=0$ خواهد شد.

۸۷ - شرط آنکه سه خط متقاطع باشند - سه خط بمعادلات :

$$\begin{cases} P_1\equiv u_1x+v_1y+w_1=0 \\ P_2\equiv u_2x+v_2y+w_2=0 \\ P_3\equiv u_3x+v_3y+w_3=0 \end{cases}$$

فرض کرده شرط لازم و کافی برای آنکه این سه خط متقاطع باشند آنستکه این

معادلات دارای یك رشته جواب باشند . این شرط را چنانکه درجبر ثابت میکنند :

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

میباشد . این شرط را بطریق دیگر نیز میتوان بیان نمود . بستگی $\Delta = 0$ نشان میدهد که سه معادله P_1 ، P_2 ، P_3 مستقل نبوده پس باید بتوان سه عدد λ_1 ، λ_2 ، λ_3 مخالف صفر پیدا نمود بطریقیکه :

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0$$

باشد . دستور فوق را بطریق دیگر نیز میتوان ثابت نمود : چون بنا بفرض خط P_3 از محل تلاقی دو خط P_1 و P_2 میگذرد پس میتوان معادله آنرا بصورت : $\lambda P_1 + \mu P_2 = 0$ چنانکه قبلا دیدیم نوشت ولی این معادله و معادله $P_3 = 0$ هردو نمایش یك خط را داده پس $\lambda P_1 + \mu P_2 \equiv \nu P_3$ خواهد بود و این همان بستگی مطلوبست و بالعکس چنانکه بستگی :

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0$$

را با شرط آنکه $\lambda_3 \neq 0$ باشد داشته باشیم میتوان از آن P_3 را بدست آورده واز آنجا نتیجه میشود که این خط از محل برخورد دو خط P_1 و P_2 خواهد گذشت . نوشتن شرط فوق اغلب اوقات آسانتر از نوشتن دتر منیان ضرایب است زیرا از نظر اول ممکن است ترکیب لازم را در بعضی حالات پیدا نمود .

۸۸ ـ معادله خطیکه از دو نقطه میگذرد ـ A و B را دو نقطه بمختصات x_1 و y_1 و x_2 و y_2 و M را نقطه از خط بمختصات x و y فرض میکنیم چون بنویسیم که دو بردار $\overrightarrow{AB}\,(x_2 - x_1 , y_2 - y_1)$ و $\overrightarrow{AM}\,(x - x_1 , y - y_1)$ نمایش یك امتداد را میدهند معادله خطیکه از دو نقطهمیگذرد خواهیم داشت :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

٨٩ ـ سطح یك مثلث ـ مثلث OM_1M_2 را که یك رأس آن مبداء O است فرض کرده سطح آن مثبت یا منفی است برحسب آنکه سوی OM_1 به M_2 () سوی مثبت یا منفی دوران درصفحه باشد. چنانکه دیدیم مساحت این مثلث مساوی مؤلفه سوم حاصل ضرب برداری $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$ بوده یعنی :

$$S = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

میباشد. حال اگر مثلث $M_0M_1M_2$ را درنظر بگیریم مساحت جبری آن مثبت یامنفی است برحسب آنکه اگر متحرکی دایره محیطی آنرا درجهت $(M_0M_1M_2)$ بپیماید این دوران در جهت مثبت یا منفی دوران در صفحه باشد. برای محاسبه سطح آن مبداء مختصات را به M_0 میبریم نتیجه میشود :

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}$$

و یا :

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

چنانکه محل دو نقطه را تغییر دهیم جهت مثبت روی دایره محیطی مثلث تغییر کرده و در نتیجه علامت S تغییر خواهد کرد. ولی از طرفی نیز میدانیم که چنانکه محل دوخط یك دتر منیان را عوض کنیم علامت آن نیز تغییر خواهدکرد.

٩٠ ـ گوشه بین دو خط ـ گوشه دو خط (D, D') بمعادلات :

$$ux + vy + w = 0 \quad (D) \qquad \text{و} \qquad u'x + v'y + w' = 0 \quad (D')$$

مساوی گوشه امتداد های (u, v) و (u', v') عمود برآن دو خط است واز آنجا چنانکه سابقاً گفتیم :

$$tg(D, D') = \frac{uv' - vu'}{uu' + vv'}$$

و بخصوص شرط عمود بودن دو خط : $uu' + vv' = 0$ میباشد.

بخش ششم

صفحه و خط در فضا

۱ ـ صفحه

۹۱ ـ معادله صفحه ـ سه محور مختصات قائم Ox و Oy و Oz وسه بردار یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بترتیب روی آنها فرض کرده x و y و z را مختصات نقطه M میگیریم. قضیه زیر را برای یك صفحه در فضا نظیر قضیه خط در صفحه ثابت میکنیم:

قضیه ـ هر صفحه (P) توسط یك معادله خطی از x و y و z بصورت:

$$ux + vy + wz + s = 0$$

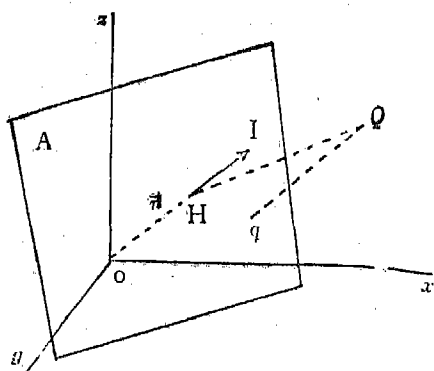
نمایش داده شده و برعکس هر معادله خطی از x و y و z که باینصورت باشد نمایش یك صفحه را خواهد داد.

اثبات ـ فرض کنیم که صفحه (P) از نقطه A بمختصات x_0 و y_0 و z_0 گذشته و عمود به بردار $\vec{n}$ که تصاویر آن u و v و w اند باشد.

شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه M روی (P) واقع باشد آنستکه بردار $\overrightarrow{OM}$ در بستگی برداری: $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{OM} = \vec{n}\,.\,\overrightarrow{OA}$ (۱) صدق کند. چنانکه این شرط را بصورت کارتزین بنویسیم. معادله حاصل: $ux + vy + wz + s = 0$ (۲) خواهد شد زیرا که: $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{OM} = ux + vy + wz$ بوده و برحسب قرار داد $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{OA} = ux_0 + vy_0 + wz_0$ را مساوی $-s$ گرفته‌ایم.

و برعکس معادله درجه اول: $ux + vy + wz + s = 0$ که در آن یکی از مقادیر u و v و w مخالف صفر فرض شده است در نظر میگیریم. بردار $\vec{n}$ را بتصاویر (u, v, w) گرفته معادله فوق را بصورت برداری: $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{OM} + s = 0$ مینویسیم.

حال گوئیم مکان نقاط M که مختصات (x, y, z) آنها درمعادله مفروض صدق

میکنند همان مکان نقاطی خواهد بود که در معادله برداری فوق صدق میکنند چنانکه

ش ۳۰

برروی برداری بردار $\vec{n}$ که از مبداء مختصات گذرانده ایم نقطه H را بطوریکه : $\overrightarrow{OH} \cdot \vec{n} = -s$ باشد انتخاب کنیم و از این نقطه صفحه (P) را عمود به $\vec{n}$ مرور دهیم این صفحه مکان مطلوب خواهد بود . زیرا که هر نقطه آن در رابطه برداری $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OH}$ صدق میکند .

اثبات قضیه فوق نظیر اثبات قضیه خط در صفحه بطریق حاصل ضرب داخلی میباشد.

۹۳ ـ فاصله یکنقطه از صفحه ـ چنانکه X ، Y ، Z را مختصات نقطه Q از فضا بگیریم و q را تصویر Q روی صفحه (P) فرض کنیم . بستگی زیر را میتوانیم بنویسیم :
$$uX + vY + wZ + s = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OQ} - \vec{n} \cdot \overrightarrow{OH} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{HQ}$$

و از آنجا چنانکه ملاحظه کنیم که $\overline{qQ}$ تصویر $\overrightarrow{HQ}$ روی $\vec{n}$ میباشد فاصله نقطه Q از صفحه (P) را خواهیم داشت :

$$qQ = \frac{uX + vY + wZ + s}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

سوی مثبت اندازه گیری این فاصله همان سوی مثبت $\vec{n}$ یعنی از طرف صفحه بطرف نقطه خواهد بود .

۹۴ ـ معادله نرمال یك صفحه ـ برای آنکه دو معادله :

$$ux + vy + wz + s = 0$$
$$u'x + v'y + w'z + s' = 0$$

نمایش یك صفحه را بدهند لازم و کافی است که ضرایب آنها با هم متناسب باشند :

یعنی : $\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} = \frac{w'}{w} = \frac{s'}{s}$ باشد .

اثبات این قضیه شبیه باثبات قضیه نظیر آن در مورد خط در صفحه است و ما از تکرار آن خود داری میکنیم .

معادله نرمال یك صفحه معادله ایست که در آن : $\vec{n}^2 = 1$

و یا آنکه : $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ باشد .

دراین حال u و v و w کوسینوسهای هادی عمودی برصفحه بوده ولی دراینجا نمیتوان آنها را برحسب یك زاویه بیان نمود بلکه مثلا چنانکه زوایای قطبی بکار بریم این مقادیررا میتوان بترتیب $\sin\theta\cos\varphi$ و $\sin\theta\sin\varphi$ و $\cos\theta$ گرفت .

پس از آنچه که گفتیم نتیجه میشود که در حالت کلی قائم صفحه (P) دارای پارامتر های هادی u و v و w میباشد کوسینوسهای هادی مربوطه را میتوان مقادیر

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \quad \text{و} \quad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \quad \text{و} \quad \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

گرفت . بدین ترتیب خط قائم مربوطه همسوی بردار (u , v , w) راستادار شده و از آنجا صفحه (P) نیز راستادار خواهد شد .

۹۴ ـ گوشه دوصفحه ـ گوشه دوصفحه راستادار (P) و (P') همان گوشه بین قائمهای مربوطشان بوده و در نتیجه :

$$\cos V = \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}\ \sqrt{u'^2+v'^2+w'^2}}$$

میباشد . شرط عمود بودن دو صفحه : $uu' + vv' + ww' = 0$ خواهد بود .

تبصره ـ معادله $ux + vy + wz + h = 0$ که درآن u و v و w مقادیر ثابت و h پارامتری میباشد نمایش کلیه صفحات موازی صفحه $ux + vy + wz = 0$ را خواهد داد زیراکه تمام آنها عمود به امتداد ثابت (u , v , w) میباشند . صفحه اخیر از مبداء مختصات نیز گذشته زیراکه مختصات $x = 0$ و $y = 0$ و $z = 0$ درآن صدق میکنند . از آنجا نتیجه میشود که :

چنانکه در معادله صفحهٔ مقدار ثابت را حذف کنیم معادلهٔ حاصل نمایش

صفحهٔ که موازی همان صفحه و از مبداء مختصات نیز میگذرد خواهد داد .

از آنجا شرط موازی بودن دو صفحه نیز نتیجه میشود و آن :

$\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'}$ میباشد .

شرط آنکه صفحهٔ (P) موازی امتدادی با پارامترهای هادی (a, b, c) باشد آنستکه : $ua + vb + wc = 0$ باشد زیراکه این بستگی بما نشان میدهد که صفحه $ux + vy + wz = 0$ از نقطه (a, b, c) گذشته و در نتیجه محتوی امتداد (a, b, c) که از مبداء مختصات گذشته است میباشد .

۹۵ـ نواحی مثبت و منفی یك صفحه ـ بهمان ترتیب که درمورد خط درصفحه یادآورشدیم ناحیه‌مثبت هرصفحه ناحیه‌ایست که‌علامت : $ux + vy + wz + s$ بازاء هر نقطه آن مثبت و ناحیه دیگر ناحیه منفی خواهد بود .

معادله صفحهٔ که ازسه نقطه A و B و C واقع روی محورهای مختصات گذشته باشد بطوریکه : $\overline{OA} = a$ و $\overline{OB} = b$ و $\overline{OC} = c$ باشند :

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$ خواهد بود .

۹۶ ـ صفحات مخصوص ـ چنانکه در معادله فوق c را بینهایت کنیم معادله حاصل دارای z نبوده و نمایش صفحهٔ موازی محور Oz را خواهدداد یعنی هرمعادله درجه اول از x و y نمایش یك صفحه موازی Oz را در فضا خواهد داد . و بهمین ترتیب است برای صفحات موازی محور های دیگر .

صفحات مختصات و صفحات نیمساز آنها دارای معادلات :

$x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ ، $y \pm z = 0$ ، $z \pm x = 0$ ، $x \pm y = 0$ میباشند .

۹۷ ـ صفحه بینهایت ـ صفحات موهومی ـ معادله هر صفحه در مختصات همگن بصورت : $uX + vY + wZ + sT = 0$ بوده معادله : $T = 0$ نیز بهمین صورت میباشد . پس از آن با وجود آنکه ازلحاظ هندسی مفهومی ندارد گوئیم این معادله نمایش صفحهٔ را میدهد و بهمان دلایل که در مورد خط در صفحه

یاد آور شدیم گوئیم نمایش صفحه بینهایت و یا مکان نقاط بینهایت فضا و یا حد صفحهٔ که نقاط برخورد آن با محور ها به بینهایت بروند خواهد داد .

بهمان ترتیب گوئیم نقاط بینهایت هرمنحنی فضائی نقاط برخورد آن با صفحه بینهایت میباشند .

و همچنین نقاط بینهایت هرصفحهٔ خطی خواهد بود که از برخورد آن صفحه با صفحه بینهایت $T = 0$ بدست میآید این خط را خط بینهایت صفحه نامند .

هرصفحه موهومی معادلهٔ بصورت: $P + iQ = 0$ که درآن P و Q توابع خطی حقیقی هستند خواهد داشت .

ازآنجا نتیجه میشود که هرصفحهٔ موهومی شامل یك خط حقیقی خواهد بود و آن خط از برخورد : $Q = 0$ $P = 0$ بدست میآید . وهمچنین دو صفحه موهومی مزدوج دارای خط حقیقی مشترك فوق میباشند .

۹۸ ـ صفحاتیکه از یك نقطه ثابت میگذرند ـ معـادله عمومی صفحاتیکه از نقطه ثابت $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$ میگذرند :

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0$$

میباشد . اثبات این بستگی ساده و شبیه باثبات دستور نظیر آن در مورد خط در صفحه است .

چنانکه (a, b, c) کوسینوسهای هادی امتدادی باشند صفحهٔ که از نقطه M_0 عمود بآن مرورداده شده باشد بمعادله: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ خواهد بود .

چنانکه نقطه M_0 ازبرخورد سه صفحه بمعادلات : $P = 0 \quad Q = 0 \quad R = 0$ بدست آمده باشد معادله مطلوب دراینحال : $\lambda P + \mu Q + \nu R = 0$ (۳)

که درآن λ ، μ ، ν غیر مشخص اند خواهد بود . اثبات آن شبیه باثبات قضیه مربوطه در مورد خط درصفحه میباشد .

صفحات (۳) را شبکه صفحه نامیده ونقطه M_0 را مبنای شبکه گویند .

۹۹ـ شرط آنکه چهار صفحه متقاطع باشند ـ شرط آنکه چهار صفحه بمعادلات :

$$P_1 \equiv u_1 x + v_1 y + w_1 z + s_1 = 0$$
$$P_2 \equiv u_2 x + v_2 y + w_2 z + s_2 = 0$$
$$P_3 \equiv u_3 x + v_3 y + w_3 z + s_3 = 0$$
$$P_4 \equiv u_4 x + v_4 y + w_4 z + s_4 = 0$$

دارای نقطه مشترك باشند آنستکه : $\| u_i \quad v_i \quad w_i \quad s_i \| = 0$ باشد .

این نقطه مشترك ممکن است درفاصله نزدیك ویا دربینهایت باشد . این شرط را ممکن است بصورت : $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \equiv 0$ نیز نوشت .

۱۰۰ ـ صفحاتیکه از خط ثابتی میگذرند ـ خط مفروض را فصل مشترك دوصفحه : $P = 0$ $Q = 0$ گرفته چنانکه مانند حالت خط درصفحه استدلال کنیم نتیجه میگیریم که معادله کلی صفحات مزبور: $P + \lambda Q = 0$ (٤)
و یا : $\lambda P + \mu Q = 0$ (٥) میباشد .

صفحات (٤) و (٥) را دسته صفحه و خط ثابت را خط مبنای دسته نامند .

شرط آنکه سه صفحه دارای خط مشترك باشند ـ شرط لازم و کافی برای آنکه سه صفحه دارای یك خط مشترك باشند آنستکه بتوان سه عدد λ_1 ، λ_2 ، λ_3 پیدا نمود بطوریکه هرسه با هم صفر نبوده و در بستگی :

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \equiv 0$$

صدق کنند . اثبات این قضیه شبیه باثبات قضیه شماره ۸۷ بخش قبل میباشد .

۱۰۱ـ معادله صفحه ایکه از سه نقطه میگذرد ـ سه نقطه بمختصات همگن $M_1(X_1, Y_1, Z_1, T_1)$ و $M_2(X_2, Y_2, Z_2, T_2)$ و $M_3(X_3, Y_3, Z_3, T_3)$ فرض کرده معادله صفحه را بصورت همگن : $uX + vY + wZ + sT = 0$ نیز میگیریم .

چون صفحه مزبور بر سه نقطه فوق میگذرد پس مختصات آنها در معادله صفحه صدق کرده و از آنجا :

$$uX_1 + vY_1 + wZ_1 + sT_1 = 0$$

$$u X_۲ + v Y_۲ + w Z_۲ + s T_۲ = ۰$$
$$u X_۳ + v Y_۳ + w Z_۳ + s T_۳ = ۰$$

میباشند چنانکه u ، v ، w ، s را بین این چهار معادله حذف کنیم دترمنیان حاصل معادله صفحهٔ که برسه نقطه میگذرد خواهد بود :

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & T \\ X_۱ & Y_۱ & Z_۱ & T_۱ \\ X_۲ & Y_۲ & Z_۲ & T_۲ \\ X_۳ & Y_۳ & Z_۳ & T_۳ \end{vmatrix} = ۰$$

چنانکه مختصات کارتزین معمولی نقاط دردست باشند معادله بالا بصورت :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & ۱ \\ x_۱ & y_۱ & z_۱ & ۱ \\ x_۲ & y_۲ & z_۲ & ۱ \\ x_۳ & y_۳ & z_۳ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

نوشته خواهد شد. چنانکه یکی از نقاط دربینهایت واقع باشد کافی است که T مربوط بآن را در معادله بالا صفر کنیم . و بهمین طریق نتیجه میگیریم که معادله صفحهٔ که از نقطه $M_۱$ گذشته وموازی امتداد های (a , b , c) و (a' , b' , c') باشد.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & ۱ \\ x_۱ & y_۱ & z_۱ & ۱ \\ a & b & c & ۰ \\ a' & b' & c' & ۰ \end{vmatrix} = ۰$$

خواهد بود . این دترمنیان را بصورت :

$$\begin{vmatrix} x - x_۱ & y - y_۱ & z - z_۱ \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = ۰$$

نیز میتوان نوشت .

۱۰۳ ـ سطح مثلث فضائی ـ چنانکه A سطح محصور در منحنی مسطح (C) واقع در فضا و 'A تصویر این سطح روی صفحهٔ باشد بستگی :

$$A' = A \cos \varphi$$

که درآن φ گوشه بین دوصفحه A و 'A است برقرارمیباشد. زاویه φ را نیز ممکن است زاویه‌بین‌دو قائم مستقیم برصفحات گرفت. چنانکه a ، b ، c را کوسینوسهای هادی خط قائم صفحه راستادار (S) و S_x و S_y و S_z را تصاویرسطح S روی‌صفحات مختصات بگیریم بستگی های :

$$S_x = S\ a \qquad S_y = S \cdot b \qquad S_z = S\ c$$

برقرار بوده وچنانکه آنها را بقوه دو رسانده وباهم جمع کنیم . دستور کلی :

$$S_x{}^2 + S_y{}^2 + S_z{}^2 = S^2 (a^2 + b^2 + c^2) = S^2$$

را خواهیم داشت . در مورد یك مثلث فضائی $A_1 A_2 A_3$ طبق شماره ۸۹ چنین خواهیم داشت :

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad S_y = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_z = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

۱۰۳ ـ حجم چهار وجهی ـ حجم هرچهار وجهی یا هرم مثلث القاعده یك سوم حجم منشور مثلث القاعده‌ایست که بهمان قاعده و ارتفاع باشد حجم هر منشور مثلث القاعده نصف حجم متوازی السطوحی است که از یالهای آن ساخته شود . از آنجا حجم هرچهار وجهی یك ششم حجم یك چنین متوازی السطوحی خواهد شد . حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ساخته شود چنانکه دیدیم مساوی حاصل ضرب مختلط $(\vec{b} \wedge \vec{c}) . \vec{a}$ بوده و اندازهٔ جبری آن مثبت یا منفی‌است برحسب آنکه سه وجهی حاصل ازاین سه بردار مستقیم یامعکوس باشد. (ش۱۵) . زیرا حاصل ضرب $\vec{b} \wedge \vec{c}$ ازحیث قدرمطلق مساوی سطح حاصل‌ازاین دو بردار بوده و از آنجا حاصل ضرب مختلط مساوی حاصل ضرب مساحت این متوازی الاضلاع در تصویر $\vec{a}$ روی $\vec{b} \wedge \vec{c}$ ویا روی عمود بصفحه این دو بردار

خواهد شد . پس مساوی حجم متوازی السطوح از حیث قدر مطلق شده و علامت آن + یا − است برحسب آنکه $\vec{a}$ و $\vec{b} \wedge \vec{c}$ در یکطرف یا در دو طرف صفحه $\vec{b}$ و $\vec{c}$ واقع باشند . و یا آنکه دو سه وجهی $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ و $(\vec{b} \wedge \vec{c}, \vec{b}, \vec{c})$ همسو یاباسوهای مخالف باشند . وچون سه وجهی دوم همسوی سه وجهی مقایسه است پس نتیجه میشود که سه وجهی $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ نیز باید همسوی سه وجهی مقایسه باشد تا آنکه حجم مثبت شود .

چنانکه دیدیم اگر X ، Y ، Z تصاویر $\vec{a}$ و X' ، Y' ، Z' تصاویر $\vec{b}$ و X'' ، Y'' ، Z'' تصاویر $\vec{c}$ باشند :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}$$

بوده واز آنجا حجم چهار وجهی $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ برحسب مختصات این نقاط :

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

خواهد شد . دراینحال برای آنکه حجم مثبت باشد کافی است که A_1 درناحیه مثبت صفحه $(A_2 A_3 A_4)$ که درسوی $(A_2 A_3 A_4)$ راستادار شده است واقع باشد .

۲ ـ خط در فضا

۱۰۴ ـ معادله یك خط در فضا ـ هرخط (D) فضائی را میتوان‌مکان برخورد دو صفحه (P) و (P') دانست واز آنجا معادله آن مجموع دو معاله :

$$(6) \quad P \equiv ux + vy + wz + s = 0 \qquad P' \equiv u'x + v'y + w'z + s' = 0$$

میباشد . ولی باید یاد آور شدکه انتخاب این دو معادله اختیاری است زیرا بینهایت صفحه ممکن است فرض کرد که خط مفروضی را در برداشته باشند . و بخصوص

چنانکه معادلات بالا را معادلات دو صفحه تصویر کنندهٔ خط روی صفحات مختصات بگیریم دستگاهی مثلا بصورت :

$$x = az + p \qquad y = bz + q \qquad (۷)$$

که در آن a ، b ، p ، q چهار مقدار ثابتند خواهیم داشت . این دو معادله معادلات صفحات تصویر کنندهٔ خط روی zOx و zOy بوده و دراینحال لازمست که خط موازی صفحه xOy نباشد . از دستور های بالا نتیجه میشود که هرخط در فضا توسط چهار پارامتر کاملا مشخص خواهد شد .

چنانکه خطی موازی صفحه xOy باشد برای تعیین آن سه صفحه تصویر کنندهٔ آنرا روی صفحات مختصات مینویسیم :

$$z = h \qquad ux + vy + w = 0$$

معادلات خط (D_0) موازی (D) که از مبداء مختصات بگذرد ازحذف مقدار ثابت در معادلات (٦) بدست میآید زیرا از برخورد دو صفحه (P_0) و (P'_0) که بموازات (P) و (P') از مبداء مختصات مرور دادهایم حاصل میشود :

$$ux + vy + wz = 0 \qquad u'x + v'y + w'z = 0$$

این معادلات را میتوان بصورت :

$$\frac{x}{vw' - wv'} = \frac{y}{wu' - uw'} = \frac{z}{uv' - vu'}$$

نیز نوشت واز آنجا نتیجه میشود که میتوان مقادیر $(vw' - wv')$ و $(wu' - uw')$ و $(uv' - vu')$ را پارامترهای هادی خط (D_0) و یا (D) گرفت .

۱۰۵- معادلات پارامتری خط درفضا - حالت اول - خط توسط یك نقطه وامتدادش تعیین گشته است .

فرض کنیم که خط (D) از نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ گذشته و دارای پارامترهای هادی (a, b, c) باشد. مختصات یکی از نقاط آنرا $M(x, y, z)$ فرض کرده چنانکه نسبت تصاویر دو بردار $\overrightarrow{M_0M}$ و (a, b, c) را بنویسیم معادلات خط در فضا را خواهیم داشت :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad (۸)$$

چنانکه نسبت فوق را مساوی ϱ قراردهیم معادلات پارامتری خط را بدست خواهیم آورد :

$$x = x_0 + \varrho a \qquad y = y_0 + \varrho b \qquad z = z_0 + \varrho c$$

در این معادلات اگر a ، b ، c کوسینوسهای هادی باشند $\varrho = \overline{M_0 M}$ بوده وگرنه نمایش مقداری متناسب آنرا خواهدداد .

حالت دوم ـ خط توسط دو نقطه تعیین گشته است : دو نقطه بمختصات $M_1(x_1, y_1, z_1)$ و $M_2(x_2, y_2, z_2)$ فرض کرده معادلات خطیکه بر این دو نقطه بگذرد از قرار دادن : $a = x_2 - x_1$ ، $b = y_2 - y_1$ ، $c = z_2 - z_1$ در معادلات فوق بدست آمده یعنی :

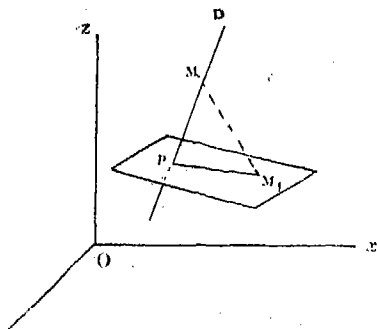
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

را خواهیم داشت . چنانکه $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = -\lambda$ قرار دهیم دستگاه :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

را خواهیم داشت .

۱۰۶ ـ فاصله یك نقطه از یك خط ـ فرض کنیم که خط از نقطه $M_0(x_0, y_0, z_0)$ گذشته و دارای پارامترهای هادی (a, b, c) باشد .

میخواهیم فاصله نقطه $M_1(x_1\ y_1\ z_1)$ را ازاین خط پیدا نمائیم . بدین منظور نقطه P را که از برخورد عمود وارد از نقطه M_1 بخط مزبور بدست آمده است در نظرمیگیریم . درمثلث قائم $M_0 P M_1$:

$$\overline{M_1 P}^2 = \overline{M_0 M_1}^2 - \overline{M_0 P}^2$$

بوده حال :

$$\overline{M_0 M_1}^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2$$

ش ۳۱

وازطرفی $\overline{PM_0}$ فاصله نقطه M_0 تاصفحهٔ

عمود به خط (D) که از نقطه M_1 گذشته است میباشد این فاصله :

$$\overline{PM_0} = \frac{a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

بوده و در نتیجه پس از قرار دادن این مقادیر در بستگی فوق و استفاده از رابطه لاگرانژ مجذور فاصله مطلوب :

$$d^2 = \frac{[b(z_0 - z_1) - c(y_0 - y_1)]^2 + [c(x_0 - x_1) - a(z_0 - z_1)]^2 + [a(y_0 - y_1) - b(x_0 - x_1)]^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

خواهد شد .

بخش هفتم

دایره

۱۰۷ ـ معادله دایره ـ دایره (C) را بمرکز $C(\alpha, \beta)$ و بشعاع R فرض کرده برای آنکه نقطه $M(x, y)$ واقع روی آن باشد لازم وکافیست که $\overline{CM}^2 = R^2$ بوده واز آنجا معادله : $\qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2 = 0 \qquad (1)$

که معادله دایرهٔ درمختصات قائم است بدست میآید .

چنانکه معادله (۱) را بسط دهیم بستگی :

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \qquad (2)$$ که‌در آن $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$

قرار داده شده است خواهیم داشت .

وبرعکس گوئیم هرمعادله که بصورت (۲) باشد نمایش یك دایره درصفحه را خواهد داد زیرا چنانکه $R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma$ بگیریم معـادله داده شده بصورت (۱) درخواهد آمد واین معادله نمایش یك‌دایره بمرکز (α, β) وبشعاع R را میدهد .

شرط آنکه این دایره حقیقی باشد آنستکه : $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0$ باشد .

چنانکه $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma < 0$ باشد شعاع دایره موهومی بوده معادله (۲) بازاء هیچ نقطه حقیقی صدق نکرده دایره در اینحال موهومی میباشد .

وچنانچه $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma = 0$ باشد شعاع دایره صفر بوده معادله دایره در اینحال : $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = 0$

و یا : $y - \beta = \pm i(x-\alpha)$ خواهد شد . گویند این معادله نمایش دو خط موهومی مزدوج راکه ازیك نقطه حقیقی میگذرند میدهد . این دایره را دایره شعاع صفر نیز نامند .

۱۰۸ ـ چنانکه‌دیدیم معادله‌هر دایرهٔ ازدرجه‌دوم بوده شرط آنکه‌معادله کامل درجه دوم $A x^2 + 2B xy + C y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ (۳)

نمایش یك‌دایره را بدهد آنستکه $B = 0$ و $A = C$ باشندزیرا دراینحال معادله (۳) بصورت : $A(x^2 + y^2) + 2Dx + 2Ey + F = 0$ (٤)

در آمده واین معادله پس ازتقسیم بر A بصورت (۲) نوشته شده ونمایش یك دایره را خواهد داد .

وبرعکس چنانکه معادله (٤) داده شده باشد میتوان آنرا بترتیب بصورت :

$$x^2 + y^2 + \frac{2D}{A}x + \frac{2E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

و یا : $$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}$$

که نمایش یك‌دایره بمرکز $-\frac{D}{A}$ و $-\frac{E}{A}$ وشعاع $R^2 = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2}$ را میدهد نوشت .

۱۰۹ ـ معادله پارامتری دایره ـ چنانکه موقعیت نقطه M را روی دایره برحسب زاویه φ بردار $\overrightarrow{CM}$ تعیین کنیم معادلات پارامتری دایره بصورت :

$$x = \alpha + R\cos\varphi \qquad y = \beta + R\sin\varphi \qquad (5)$$

نوشته میشوند .

مماس بر دایره ـ خط مماس MT بر دایره در نقطه M که با مختصات فوق

داده شده باشد، عمود به $\overrightarrow{CM}$ بوده و پارامتر های هادی آن :

$$R\,sin\left(\varphi+\frac{\pi}{۲}\right)=R\,cos\,\varphi \quad و \quad R\,cos\left(\varphi+\frac{\pi}{۲}\right)=-R\,sin\,\varphi$$

میباشند. پس میتوان مقادیر $(-sin\,\varphi \quad و \quad cos\,\varphi)$ راکوسینوسهای هادی نیم مماس مثبت گرفته و معادله مماس را بدینصورت نوشت :

$$\frac{x-\alpha-R\,cos\,\varphi}{-sin\,\varphi}=\frac{y-\beta-R\,sin\,\varphi}{cos\,\varphi}$$

و یا :
$$(x-\alpha)\,cos\,\varphi+(y-\beta)\,sin\,\varphi-R=۰$$

چنانکه معادله دایره بصورت : $(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}-R^{۲}=۰$

داده شده باشد بآسانی میتوان دیدکه معادله مماس در نقطه $M(x_{۰},y_{۰})$

$$y-y_{۰}=-\frac{x_{۰}-\alpha}{y_{۰}-\beta}(x-x_{۰}) \quad : و یا \quad (x-x_{۰})(x_{۰}-\alpha)+(y-y_{۰})(y_{۰}-\beta)=۰$$

خواهد شد. این دستوررا بصورت دیگر نیز میتوان نوشت بدین منظور طرفین آنرا با رابطه : $(x_{۰}-\alpha)^{۲}+(y_{۰}-\beta)^{۲}-R^{۲}=۰$ جمع کرده و فرمول :

$$(x_{۰}-\alpha)(x-\alpha)+(y_{۰}-\beta)(y-\beta)-R^{۲}=۰ \qquad (۶)$$

را جهت مماس بردایره بدست خواهیم آورد.

۱۱۰ ـ قوت نقطه نسبت بدایره ـ قضیه ـ دایره (C) بمعادله :

$$x^{۲}+y^{۲}-۲\alpha x-۲\beta y+\gamma=۰ \qquad (۲)$$

ونقطه $P(x_{۰},y_{۰})$ را درصفحه آن فرض کرده قاطع $P\lambda$ این دایره را در نقاط M,M' قطع مینماید حاصل ضرب : $\overline{PM}\cdot\overline{PM'}=p$ بستگی بقاطع نداشته ودارای مقداری ثابت میباشد.

اثبات ـ کوسینوسهای هادی $P\lambda$ را (a,b) گرفته معـادله پارامتری این قاطع $x=x_{۰}+\rho a$ و $y=y_{۰}+\rho b$ میبـاشند مقادیر ρ مربوط بنقاط برخورد خط ودایره ازحل معادله : $f(x_{۰}+\rho a,y_{۰}+\rho b)=۰$ که درآن $f(x,y)$ طرف اول معادله (۲) میباشد بدست آمده ریشه‌های این معادله درجه دوم برحسب ρ مقادیر $\overline{PM}$ و $\overline{PM'}$ خواهند بود.

برای بدست آوردن حاصل ضرب این ریشه ها بایستی ضریب $\rho^{۲}$ و مقداریکه

به ρ بستگی ندارد پیدا کنیم . پس از بسط معادله فوق بآسانی دیده میشود که ضریب ρ^2 یك بوده و $p = f(x_0, y_0)$ خواهد شد. وچنانکه دیده میشود این مقدار بستگی بکوسینوسهای هادی (a, b) نداشته و قوت نقطه P نسبت بدایره نـامیده میشود . ازآنجا دستور زیر را جهت قوت نقطه خواهیم داشت :

دستور ـ برای بدست آوردن قوت نقطهٔ نسبت بدایره باید در معادله دایره که تمام آن در یکطرف نوشته شده و ضریب x^2 و y^2 آن یك بـاشد مختصات آن نقطه را بجای مختصات جاری معادله قرار داد .

۱۱۱ ـ محور اصلی دو دایره ـ دو دایرهٔ

$$C \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0 \qquad (7)$$

$$C' \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0 \qquad (8)$$

فرض کرده مکان نقاطیکه دارای یك قوت نسبت باین دودایره باشند دارای معادلهٔ :

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma'$$

و یا :

$$2(\alpha' - \alpha)x + 2(\beta' - \beta)y + \gamma - \gamma' = 0$$

که معادلهٔ یك خط است بوده و بآسانی دیده میشود که این خط عمود بامتداد : $2(\alpha' - \alpha)$ و $2(\beta' - \beta)$ یعنی عمود به خط مرکز های دو دایره میباشد . این خط ازنقاط برخورد دودایره نیز گذشته زیراکه مختصات این نقاط ازحل دستگاه فوق بدست میآیند . این خط را محور اصلی دو دایره نامند .

چنـانکه دایرهٔ دیگـر $C'' = 0$ را فرض کنیم محور های اصلی این سه دایره دو بدو دارای معادلات :

$$C - C' = 0 \qquad C' - C'' = 0 \qquad C'' - C = 0$$

بوده چنانکه طرف اول این معادلات را با هم جمع کنیم نتیجه صفر میشود واز آنجا همانطورکه در شماره (۸۷) گفتیم این سه خط از یك نقطه گذشته و این نقطه را مرکز اصلی سه دایره نامند .

۱۱۲ ـ گوشه دو دایره ـ گوشه دو دایره گوشه بین مماسهای یکی از نقاط

برخوردشان میباشد . اگر در مثلث OMO' بستگی :

$$\overline{OO'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{O'M}^2 - 2\, OM \cdot O'M \cdot \cos \widehat{OMO'}$$

را بنویسیم و d را فاصله OO' بگیریم : $\cos V = \frac{R^2 + R'^2 - d^2}{2RR'}$

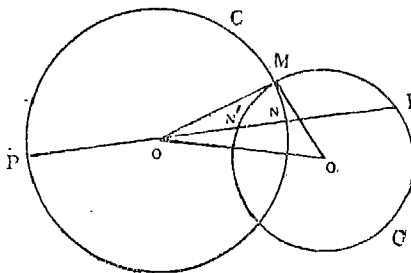
خواهد شد . چنانکه معادلات دو دایره را بصورت (۷) و(۸) داشته باشیم :

$$R^2+R'^2 - d^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma + \alpha'^2 + \beta'^2 - \gamma' - (\alpha - \alpha')^2 - (\beta - \beta')^2$$
$$= 2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' - \gamma - \gamma'$$

شده و ازآنجا : $\cos V = \frac{2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' - \gamma - \gamma'}{2RR'}$ خواهد شد .

۱۱۳ ـ دوایر عمود بهم ـ دودایره وقتی بهم عمودندکه زاویه بینشان قائم باشد وازآنجا لازم میآیدکه : $\cos V = 0$ و یا : $d^2 = R^2 + R'^2$ باشد .

دراینحال شعاع OM عمود به (C') وهمچنین شعاع $O'M$ عمود به (C) خواهندبود. قوت نقطه O نسبت به (C') نیز R^2خواهد شد .

قضیه ـ اگر دودایره عمود بهم باشند قطر غیر مشخص هرکدام ازآنها دایره دیگررا دردونقطه که بادوسرقطر تشکیل یك بخش توافقیرا میدهند قطع مینماید.

زیرا چنانکه (C) و (C') برهم عمود باشند.

$$\overline{ON'} \cdot \overline{OP'} = R^2 = \overline{ON}^2 = \overline{OP}^2$$

بوده وازآنجا Nو P مزدوج‌توافقی نقاط N' و P' میباشند و برعکس اگر N و P مزدوج توافقی نقاط N' و P' باشند بستگی بالا برقرار بوده ودو دایره برهم عمودند .

ش ۳۲

اگر دوایر (C) و (C') برحسب معادلات (۷) و (۸) داده شده باشند شرط عمود بودنشان : $2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' = \gamma + \gamma'$ خواهد بود .

۱۱۴ ـ نقاط سیکلیك ـ خطوط ایز ترپ ـ معادله دایره‌را بصورت(۲) فرض

کرده محل برخورد آن باخط بینهایت ازنوشتن معادله بصورت همگن و بعداز $T=0$
کردن در آن بدست میآیند. معادله حاصل : $X^2 + Y^2 = 0$ که بدو معادله :

$$Y = iX \quad و \quad Y = -iX$$

تجزیه پذیراست نوشته میشود. از آنجا نتیجه میشود که مختصات همگن نقاط بینهایت
دایره $(1, i, 0)$ و $(1, -i, 0)$ شده و دیده میشود که این مختصات
بستگی بضرایب α ، β و γ ندارند. پس نقاط بینهایت تمام دوایر صفحه یکی میباشند.
این نقاط که موهومی مزدوج اند بنقاط سیکلیك یا نقاط بینهایت دایره موسومند.

خط ایزترپ خطی است که بر یکی از نقاط سیکلیك مرور نماید. بدین ترتیب
هر خط ایزترپ دارای ضریب زاویه $+i$ یا $-i$ خواهد بود.

از هر نقطه صفحه دو خط ایزترپ میگذرد . این خطوط چنانچه این نقطه
حقیقی باشد موهومی مزدوج خواهند بود.

بخش هشتم

کره

۱۱۵ - معادله کره - بنا بتعریف کره مکان نقاطی است که از یك نقطه $C(\alpha, \beta, \gamma)$ موسوم بمرکز بیك فاصله باشند . پس معادلهٔ هر کره (S) بشعاع R در مختصات قائم : $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2$ (۱)

بوده چنانچه این معادله را بسط دهیم معادله حاصل بصورت:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0 \quad (2)$$

که در آن : $\delta = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - R^2$ است نوشته میشود . و برعکس هر معادله که بصورت (۲) باشد یك کره که مرکز آن (α, β, γ) و شعاع آن :

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta$$

است نمایش میدهد . این شعاع نیز ممکن است حقیقی ، موهومی و یا صفر باشد در حالت اخیر گویند معادله نمایش کره شعاع صفر را میدهد. چنین کره را ممکن است یك نقطه حقیقی و یایك مخروط موهومی برأس C فرض نمود. قاعده این مخروط دایره موهومی بینهایت میباشد .

۱۱۶ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه معادله کامل درجه دوم :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bxy + 2B'yz + 2B''zx + 2Dx + 2D'y + 2D''z + F = 0$$

نمایش یك کره را بدهد آنستکه :

$$B = B' = B'' = 0 \quad \text{و} \quad A = A' = A''$$ باشند :

اثبات این قضیه شبیه باثبات قضیه مربوطه در مورد دایره درصفحه است و از تکرار آن خود داری میشود .

۱۱۷ ـ معادله پارامتری کره ـ چنانکه برای تعیین موقعیت نقطه M واقع روی کره (S) بمرکز C زوایای‌قطبی θ و φ بردار $\overrightarrow{CM}$ را بکاربریم معادله پارامتری کره را خواهیم داشت :

$$(۳) \quad x = \alpha + R \sin\theta \cos\varphi \quad y = \beta + R \sin\theta \sin\varphi \quad z = \gamma + R \cos\theta$$

۱۱۸ ـ صفحه مماس بر کره ـ معادله کره را بصورت (۲) فرض کرده نقطه Q (x, y, z) را روی آن میگیریم . مختصات نقطهٔ غیر مشخص خطیکه از این نقطه گذشته باشد : $X = x + ar$ $\quad Y = y + br$ و $Z = z + cr$

که در آن (a, b, c) کوسینوسهای هادی آن میباشند خواهند بود . مقادیر r مربوط بنقاط برخورد این خط و کره ازقراردادن مقادیر فوق در معادله (۲) بدست آمده یکی از آنها : $r_1 = 0$ و دیگری

$$r_2 = -2 [a (x - \alpha) + b (y - \beta) + c (z - \gamma)]$$

خواهد بود . چنانکه r_2 را مساوی صفرفرض کرده یعنی خط مزبور را مماس بر کره بگیریم شرط آنکه خطی ازنقطه Q گذشته ومماس بر کره باشد خواهیم داشت. این شرط : $a (x - \alpha) + b (y - \beta) + c (z - \gamma) = 0$ بوده واز بررسی آن نتیجه میشود که امتداد (a, b, c) که مماس بر کره است عمود بامتداد ($x - \alpha, \dots$) که امتداد شعاع کره است خواهد بود . پس از آنجا نتیجه میشود که هرخط مماس بر کره در نقطه Q در صفحهٔ که صفحه مماس بر کره در نقطه Q نامیده میشود واقع بوده و معادله این صفحه بآسانی نیز نوشته میشود و آن چنانکه X ، Y ، Z را نقطهٔ از آن صفحه فرض کنیم :

$$(٤) \quad (X - x) (x - \alpha) + (Y - y) (y - \beta) + (Z - z) (z - \gamma) = 0$$

خواهد بود چنانکه ملاحظه کنیم که :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2 \alpha x - 2 \beta y - 2 \gamma z + \delta = 0$$

است معادله (٤) بصورت :

$$(٥) \quad Xx + Yy + Zz - \alpha (X + x) - \beta (Y + y) - \gamma (Z + z) + \delta = 0$$

نیز نوشته خواهد شد .

حال فرض کنیم که صفحه (٥) از نقطه ثابت $R(x', y', z')$ نیز گذشته باشد یعنی:

$$x'x + y'y + z'z - \alpha(x'+x) - \beta(y'+y) - \gamma(z'+z) + \delta = 0$$

باشد این معادله بما نشان میدهد که نقطه Q را بنوبه خود میتوان درصفحه ثابت:

$$Xx' + Yy' + Zz' - \alpha(X+x') - \beta(Y+y') - \gamma(Z+z') + \delta = 0$$

فرض نموده و از آنجا نتیجه میشود که نقاط تماس خطوط خارج از نقطه ثابت R و مماس به (S) در صفحهٔ که بصفحه قطبی نقطه R موسوم است واقع میباشند. مکان این خطوط مماس را نیز مخروط مماس به کره نامند. البته این مخروط موقعی وجود دارد که R خارج از کره باشد.

۱۱۹ ـ قوت نقطه نسبت بکره ـ اگر نقطه Q را خارج کره فرض کرده و خطیکه از آن گذشته باشد کره را در دو نقطه P_1 و P_2 قطع نماید حاصل ضرب $p = \overline{QP_1} \cdot \overline{QP_2}$ بستگی بقاطع نداشته ومقدار آنرا قوت نقطه Q نسبت بکره نامند.

بهمان ترتیب که در شماره پیش عمل کردیم این قضیه ثابت شده و نیز نتیجه میشود که:

$$p = \overline{QP_1} \cdot \overline{QP_2} = x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2\alpha x' - 2\beta y' - 2\gamma z' + \delta$$

میباشد x' ، y' ، z' مختصات نقطه Q فرض شده اند.

صفحه اصلی دو کره بمعادلات $S = 0$ و $S' = 0$ مکان نقاطی است که نسبت بدو کره بیک قوت باشند معادله این صفحه $S - S' = 0$ خواهد بود. مکان نقاطیکه نسبت بسه کره $S = 0$ ، $S' = 0$ ، $S'' = 0$ دارای یك قوتند خطی است مشترك بین سه صفحه اصلی این سه کره که دو بدو گرفته شده باشند زیرا معادلات این سه صفحه:

$$S - S' = 0 \qquad S' - S'' = 0 \qquad S'' - S = 0$$

بوده وازجمع کردن طرف اول این معادلات نتیجه میشود که این سه صفحه برخطی که نقاط آن نسبت بسه کره هم قوت هستند خواهند گذشت.

و بهمین ترتیب دیده میشود که شش صفحه اصلی چهار کره از نقطه مشترکی که بمرکز اصلی چهار کره موسوم است میگذرند.

۱۳۰- معادله دایره درفضا - هر دایره درفضا از برخورد یك کره و یك صفحه و یا از برخورد دوکره بدست میآید و از آنجا هر دایره فضائی توسط دو معادله که یکی از آنها ازدرجه دوم میباشد نمایش داده میشود .

زاویه دوکره زاویه بین صفحات مماس آنها دریکی از نقاط برخوردشان میباشد .

دوکره را بر هم عمود گویند وقتیکه زاویه بینشان قائمه باشد . شرط عمود بودن دوکره نظیر عمود بودن دو دایره در صفحه بصورت :

$$۲(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = \delta + \delta'$$

نوشته میشود .

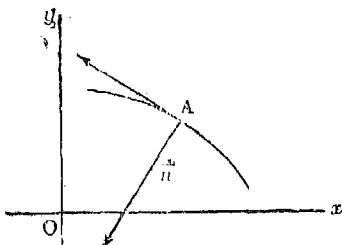
بخش نهم

خط مماس ـ صفحه مماس

۱۲۱ ـ مماس منحنی مسطحه ـ درصفحهٔ که در آن دو محور قائم Ox و Oy انتخاب شده است منحنی (C) و همچنین یك رابطه بین نقطه متغیر M واقع روی آن و یك پارامتر t فرض کرده چنانکه در مورد مشتق هندسی یك بردار دیدیم بردار $\overrightarrow{OM}$ تابعی از t بوده واز آنجا تصاویر آن (x, y) که مختصات این نقطه‌اند توابعی از t خواهند بود. منحنی (C) که بدین ترتیب مشخص شود چنانکه دیدیم بصورت پارامتری تعیین شده و هودوگراف بردار $\overrightarrow{OM}$ میباشد.

تابع برداری $\overrightarrow{OM}$ چنانکه پیش گفتیم دارای مشتق هندسی بوده و تصاویر این مشتق بترتیب $\frac{dx}{dt}$ و $\frac{dy}{dt}$ میباشند.

$$\frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt}$$

امتداد این مشتق مماس بر (C) بوده واز آنجا مقادیر $\left(\frac{dy}{dt} \text{ و } \frac{dx}{dt}\right)$ ویا (dx, dy) پارامترهای هادی مماس خواهند بود. نسبت این پارامتر های هادی یعنی: $\frac{dy}{dx}$ نیز ضریب زاویه مماس میباشد.

ش ۳۳

اندازهٔ این مشتق نیز چنانکه گفتیم مساوی ds بوده و چون تصاویر آن dx و dy و یا مشتقات تصاویر $\overrightarrow{OM}$ اند پس:

$$ds^2 = \left[d(\overrightarrow{OM})\right]^2 = dx^2 + dy^2$$

میباشد . اگر بجای متغیر t قوس s را متغیر بگیریم مشتق $\frac{d(\overrightarrow{OM})}{ds}$ مساوی برداریکه $\overrightarrow{u}$ مماس شده وتصاویر آن : $\frac{dx}{ds}$ و $\frac{dy}{ds}$ کوسینوسهای هادی مماسی که در سوی قوسهای صعودی راستادار شده است خواهند بود .

چنانکه α زاویه مماسی که بدین ترتیب راستادار شده‌است با محور Ox باشد

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\alpha \qquad (۱)$$

میباشند . این خط مماس را نیم مماس مثبت نیز گویند .

پس چنانکه دیدیم معادله مماس بر (C) در نقطه $A(x, y)$ چنانکه X و Y مختصات یکی از نقاط آن باشند :

$$(X - x)\,dy - (Y - y)\,dx = 0 \qquad (۲)$$ خواهد بود .

چنانکه معادله منحنی بصورت (۳) $y = f(x)$ باشد میتوان x را بجای t انتخاب نمود دراینحال ضریب زاویه مماس $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ شده ومعادله مماس :

$$(Y - y) = y'(X - x)$$ نوشته میشود .

۱۳۳ ـ مماس برخم ها منی که معادله آن نسبت بیکی از مختصاتش حل نشده باشد ـ معادله منحنی را بصورت : (٤) $f(x, y) = 0$ فرض کرده چنانکه y را برحسب x بیان کنیم معادلهٔ بصورت (۳) خواهیم داشت ضریب زاویه مماس بر این منحنی مشتق y'_x بوده ولی همانطوریکه در جبر ثابت میشود : $y'_x = \frac{-f'_x}{f'_y}$ بوده و از آنجا معادله مماس بر منحنی (٤) :

$$(X - x) f'_x + (Y - y) f'_y = 0 \qquad (٥)$$

که درآن f'_x و f'_y مشتقات جزئی f نسبت به x و y اند خواهد شد .

۱۳۴ ـ نقاط مخصوص یا مکرر ـ معادله خط مماس که در شماره قبل برای منحنیات $f(x, y) = 0$ یاد آور شدیم چنانچه $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ هر دو بازاء مختصات نقطه M صفرشوند معنائی نداشته وچنین نقاط را نقاط مخصوص یامکرر نامند

درحالتیکه سه مشتق جزئی مرتبه دوم یعنی $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ هرسه باهم صفر نباشند نقطه M خواه یکنقطه منفرد یعنی نقطهٔ که از آن هیچ شاخه منحنی مرور نکرده خواه یك نقطه برخورد دوشاخه منحنی وخواه یك نقطه باز گشت خواهد بود .

نقطهٔ باز گشت نقطه ایست که دو شاخه منحنی در آن دارای یك خط مماس باشند شکل منحنی در این نقطه عموماً شکل (۱) ۳٤ بوده ولی ممکن است باشکال (۲) ، (۳) ، (٤) نیز در آید .

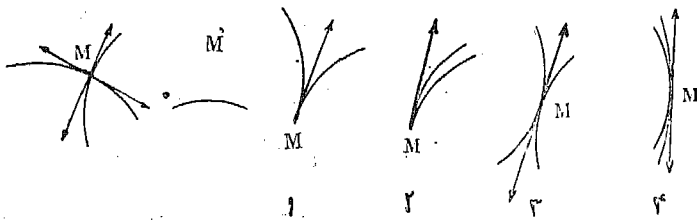
پس مختصات x و y یك نقطه مکرر از حل دستگاه :

$$f(x,y)=0 \qquad f'_x(x,y)=0 \qquad f'_y(x,y)=0$$

بدست آمده والبته این دستگاه سه معادلهٔ دومجهولی همیشهٔ دارای جواب نخواهد بود . چنین نقاط را مکرر از مرتبه دوم یا نقاط مضاعف نامند .

چنانکه می بینیم هر قاطع غیر مشخصی که از یك نقطه ساده M مرور نماید منحنی را در یك نقطه M قطع نموده ودرصورتیکه نقطه مضاعف باشد هر قاطع غیر مشخص منحنی را در دو نقطه منطبق برهم قطع نموده و بطورکلی گویند :

نقطه M مکرر ازمرتبه p میباشد چنانکه هرقاطع غیرمشخص که از آن نقطه مرور نماید منحنی را در p نقطه منطبق برهمان نقطه قطع نماید . دربین این قاطعها p خط وجود دارد که منحنی را هر کدام در $p + 1$ نقطه منطبق برهم قطع مینمایند . و اینها همان p مماس نقطه M میباشند . و چنانکه در مورد $p = 2$ یاد آور شدیم مشتقات جزئی تابع f بازاء مختصات این نقاط تا مرتبه $p - 1$ صفر خواهند بود .

ش ۳٤

و همچنین ممکن است که نقطه مکرر M در بینهایت واقع باشد .

۱۲۴ ـ نقطه مکرر در مبداء مختصات ـ بررسی یك نقطه از نظر مکرر بودن آن و همچنین بدست آوردن مماسهای منحنی در آن نقطه چنانکه این نقطه در مبداء مختصات باشد بآسانی صورت میگیرد . وقضیه زیر را در این مورد یادآور میشویم . چنانکه نقطه در مبداء مختصات نباشد باید مبداء مختصات را بآن نقطه منتقل نمود .

قضیه ـ چنانکه جملات کوچکترین درجه یك معادله جبری برحسب x و y ازدرجه p ام باشند مبداء مختصات یك نقطه مکرر ازمرتبه p ام بوده وبرای بدست آوردن دسته مماس آن نقطه کافی است که مجموع این جملات را مساوی صفر قرار دهیم . بدین منظور معادله منحنی را بصورت کثیر الجمله های همگن باقوای صعودی بصورت :

$$f(x,y)\equiv\varphi_p(x,y)+\varphi_{p+1}(x,y)+\cdots+\varphi_m(x,y)=0 \quad (6)$$

که در آن φ_p کثیر الجمله همگن ازمرتبه p ام است مینویسیم وچون منحنی ازمبداء مختصات میگذرد معادله آن دارای مقدار ثابت نخواهد بود . بطوریکه $p\geqslant 1$ میباشد چنانکه x و y مختصات نقطهٔ از منحنی فرض شوند ضریب زاویه مماس در مبداء را میتوان حد نسبت $\frac{y}{x}$ وقتیکه x بسمت صفر میل نماید دانست . پس اگر : $\frac{y}{x}$ را مساوی γ قرار دهیم $\gamma x=y$ شده و معادله (۶) چنین نوشته خواهد شد :

$$f(x,\gamma x)\equiv x^p\varphi_p(1,\gamma)+x^{p+1}\varphi_{p+1}(1,\gamma)+\cdots+x^m\varphi_m(1,\gamma)=0$$

این معادله پس از تقسیم بر x^p بصورت :

$$\varphi_p(1,\gamma)+x\varphi_{p+1}(1,\gamma)+\cdots+x^{m-p}\varphi_m(1,\gamma)=0 \quad (7)$$

درآمده وچنانکه گفتیم ریشه های این معادله بازاء $x=0$ مقادیر ضریب زاویه های خطوط مماس برشاخه های منحنی را خواهند داد .

پس کافی است که : $\varphi_p(1,\gamma)=0$ باشد و این معادله بما نشان میدهد که تمام خطوط غیراز Oy که توسط دسته خط : (۸) $\varphi_p(x,y)=0$

نمایش داده شده‌اند مماسهای منحنی در نقطه O میباشند.

چنانکه x را بجای y و y را بجای x درمحاسبات فوق قراردهیم بازهم بهمین نتیجه خواهیم رسید ولی دراینحال محور Ox محور استثنائی خواهد بود و از آنجا نتیجه میشود که معادله (۸) درهرحال نمایش دسته خط مماسها را میدهد.

این دسته خط چنانکه می بینیم شامل p خط حقیقی، موهومی، مجزا ویامنطبق برهم بوده و ازآنجا نتیجه میشود که منحنی در این نقطه دارای p مماس میباشد. و طبق تعریف نقاط مکرر چنین نقطه مکرر از مرتبه pام خواهد بود. ونیز بساید یاد آور شد که هر یك از این p مماس منحنی را در بیش از p نقطه منطبق بر هم قطع میکند.

چنانکه $p = ۱$ یعنی نقطه ساده باشد قضیه فوق نیز قابل‌قبول بوده ودراینحال برای بدست آوردن معادله مماس کافی‌است که مجموع جملات درجه اول را مساوی صفر قرار دهیم.

۱۳۵ ـ مماس بر منحنی فضائی ـ منحنی‌فضائی (C) را فرض کرده $\overrightarrow{OM}$ ودر نتیجه مؤلفه های آن x ، y ، z توابعی ازپارامتر t خواهند بود. چنانکه نقطهٔ ازآن دارای مماس بوده و مشتق $\frac{ds}{dt}$ نیز وجود داشته باشد بردار مشتق $\overrightarrow{OM}$ چنانکه در مورد مشتق هندسی دیدیم

$$d(\overrightarrow{OM}) = \vec{i}\,.\,dx + \vec{j}\,.\,dy + \vec{k}\,.\,dz$$

نیز وجود داشته وبرداری مماس برمنحنی (C) خواهد بود. مؤلفه‌های این‌دیفرانسیل هندسی یعنی dx ، dy ، dz پارامترهای هادی خط مماس خواهند بود وهمانطور که دیدیم قدر مطلق این مشتق هندسی $|ds|$ بوده و از آنجا:

$$ds^{۲} = dx^{۲} + dy^{۲} + dz^{۲}$$

خواهد شد.

چنانکه قوس s را متغیر بگیریم $\frac{d(\overrightarrow{OM})}{ds}$ مساوی برداریکه $\vec{u}$ مماسیکه

درسوی قوسهای صعودی راستادار شده است میباشد . دراینحال $\frac{dx}{ds}$ و $\frac{dy}{ds}$ و $\frac{dz}{ds}$ کوسینوسهای هادی مماسیکه بدین ترتیب راستادار شده است خواهند بود . پس معادله خط مماس یك خم چپ :

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

خواهد شد .

۱۳۶ ـ صفحه مماس بریك سطح ـ فرض کنیم که سطح (S) توسط معادلات پارامتریش داده شده باشد مختصات هر نقطه M آن توابعی ازدو پارامتر u و v بوده یعنی :

$$x=x(u,v) \qquad y=y(u,v) \qquad z=z(u,v) \qquad (۹)$$

میباشند . از نقطه M واقع روی این سطح منحنی (C) غیرمشخص را روی آن رسم کرده میدانیم که معادله آن از گذاردن u و v برحسب پارامتر دیگری درمعادله (۹) بدست آمده و درنتیجه پارامترهای‌هادی مماس M T آن بترتیب dx ، dy ، dz یعنی:

$$\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv \qquad \frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv \qquad \frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

خواهند بود . پس معادلات پارامتری مماس بصورت :

$$\begin{cases} X-x=\rho\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right) \\ Y-y=\rho\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right) \\ Z-z=\rho\left(\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right) \end{cases}$$

نوشته شده وچنانچه $\rho\, du$ و $\rho\, dv$ را بین این معادلات حذف کنیم معادله مکان M T وقتیکه منحنی (C) را در روی این سطح تغییر دهیم خواهیم داشت :

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}=0$$

این معادله یك صفحه که صفحه مماس سطح (S) در نقطه M نامیده میشود نمایش میدهد .

تبصره - صفحه مماس نظیر نقطه مربوطه‌اش بدو پارامتر مستقل u و v بستگی دارد ولی سطوحی نیز یافت میشوند که صفحه مماس در آنها به بیش از یك پارامتر بستگی نخواهد داشت چنین سطوح را گسترش پذیر گویند . صفحه مماس دراینحال مماس برسطح درطول یك خط خواهد بود مثلا صفحه مماس بریك مخروط .

۱۳۷ - چنانکه معادله سطح بصورت : $f(x, y, z) = 0$ (۱۰)

داده شده باشد بهمان ترتیب که در شماره پیش عمل کردیم از نقطه $M(x, y, z)$ منحنی (C) غیر مشخصی واقع روی سطح مرور میدهیم . معادلات خط مماس براین منحنی :

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz} \quad (۱۱)$$

بوده وچون منحنی (C) روی سطح رسم شده است مختصاتش درمعادله (۱۰) صدق کرده ودر نتیجه درمعادله‌ که ازدیفرانسیل گرفتن این معادله بدست میآید نیز صدق خواهندکرد پس :

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz = 0 \quad (۱۲)$$

خواهد شد. چنانکه dx ، dy ، dz را بین معادلات (۱۱) و(۱۲) حذف کنیم معادله :

$$(X - x) f'_x + (Y - y) f'_y + (Z - z) f'_z = 0 \quad (۱۳)$$

که نمایش یك صفحه را میدهد بدست خواهد آمد . این معادله مکان مماسهای MT بوده وصفحه مماس (S) در نقطه M نامیده میشود .

چنانکه معادله سطح بصورت : $z = \varphi(x, y)$

باشد معادله صفحه مماس بصورت :

$$(Z - z) = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y)$$

نوشته شده وچنانکه برحسب قرار داد مشتقات جزئی z را :

$p = \frac{\partial z}{\partial x}$ ، $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ بنویسیم معادله صفحه مماس :

$$(Z - z) = p(X - x) + q(Y - y)$$

خواهد شد .

۱۲۸ـ خط قائم ـ صفحه قائم ـ خط قائم بر منحنی (C) در نقطه M بنا بتعریف خط عمود بر مماس MT این نقطه میباشد . چنانچه منحنی مسطحه باشد این خط یکی بوده واگر منحنی فضائی باشد بینهایت خط قائم که همگی در یك صفحه که بصفحه قائم منحنی چپ موسوم است موجود میباشند .

نیم قائم مثبت ـ چنانکه منحنی مسطحه (C) را راستادار فرض کنیم نیم قائم مثبت از دوران نیم مماس مثبت بزاویه $+\frac{\pi}{2}$ بدست میآید . چنانکه α زاویه نیم مماس مثبت بامحور Ox باشد زاویه نیم‌قائم مثبت باهمین محور $\alpha + \frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

پس معادله خط قائم برای منحنی مسطحه (C) :

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0 \qquad (۱٤)$$

خواهد شد .

صفحه قائم منحنی چپ (C) صفحه‌ایست عمود برمماس MT وبنابراین معادله آن :

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0$$

میباشد . زیرا پارامترهای هادی مماس dx ، dy ، dz میباشند .

۱۲۹ ـ خط قائم بر سطح ـ خط قائم برسطح (S) در یك نقطه بنا بتعریف خط عمود به صفحه مماس همان نقطه میباشد .

پس اگر معادله سطح بصورت پارامتری داده شده باشد پارامترهای هادی این خط بترتیب :

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \quad \text{و} \quad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

خواهند بود . این مقادیر را بصورت :

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \quad \text{و} \quad \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \quad \text{و} \quad \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

که دترمنیانهای توابعی نامیده میشوند نیز مینویسند .

صفحه قائم بریك سطح هرصفحهٔ که برخط قائم آن سطح بگذرد میباشد .

چنانکه معادله سطح بصورت $f(x, y, z) = 0$ داده شده باشد پارامتر های هادی قائم بترتیب f'_x ، f'_y ، f'_z خواهند بود .

و اگر معادله سطح : $z = \varphi(x, y)$ باشد پارامتر های هادی قائم چنانکه در معادله صفحه مماس دیده میشوند $(p, q, -1)$ میباشند پس دراینحال معادله خط قائم : $\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$ خواهد بود :

۱۳۰ ـ تحت مماس و تحت قائم ـ منحنی (C) را بمعادله : $y = f(x)$ فرض کرده مماس درنقطه M براین منحنی $Y - y = y'(X - x)$ میباشد چنانکه Y را $= 0$ قرار دهیم طول نقطه T محل برخورد خط با محور Ox بدست آمده وچنانکه P را تصویر نقطه M روی همین محور بگیریم :

$$\overline{PT} = X - x = -\frac{y}{y'}$$

خواهد شد این مقدار را تحت مماس نقطه M نامند .

N را نقطه برخورد خط قائم با محور Ox فرض کرده اندازهٔ PN را تحت قائم نامند . اندازهٔ $\overline{PN}$ از مثلث MTN بدست میآید :

$$\overline{PN} = -\frac{\overline{PM}^2}{\overline{PT}} = -\frac{y^2}{-\frac{y}{y'}} = yy'$$

۱۳۱ ـ مسئله ۱ ـ مطلوبست تعیین مماسهائیکه از یکنقطه میگذرند ـ چنانکه منحنی مسطحه (C) برحسب معادلات پارامتریش داده شده باشد معادلهٔ مماس برحسب پارامتر t معلوم بوده و کافی است بنویسیم که مختصات (x_0, y_0) آن نقطه در این معادله صدق میکنند . بدین ترتیب معادلهٔ برحسب t که ریشه هایش مماسهای مطلوب را معلوم میکنند خواهیم داشت .

چنانکه معادله منحنی بصورت : $f(x, y) = 0$ باشد معادله مماس را نوشته وشرط آنکه این خط از نقطه (x_0, y_0) مرور نماید بیان میکنیم بدین ترتیب معادلهٔ برحسب x و y داشته ریشه های این معادله و معادله $f = 0$ مختصات نقاط تماس را بما خواهند داد .

۱۳۲ ـ مسئله ۴ ـ مطلوبست تعیین قائمهائیکه از یك نقطه میگذرند ـ چنانکه منحنی مسطحه (C) توسط معادلات پارامتریش داده شده باشد شرط آنکه خط قائم دریك نقطه غیرمشخص منحنی از نقطه مزبور بگذرد مینویسیم بدین ترتیب معادلهٔ برحسب t که ریشه های آن پارامترهای نقاط برخورد قائمها ومنحنی هستند خواهیم داشت .

چنانکه معادله منحنی بصورت : $f(x, y) = 0$ داده شده باشد نظیر آنچه که گفتیم شرط آنکه نقطه مزبور روی قائمی واقع باشد آنستکه :

$$(x_0 - x) f'y - (y_0 - y) f'x = 0$$

باشد . این معادله یك منحنی که با منحنی مفروض در نقاط خروج قائمهای مطلوب برخورد مینماید نمایش خواهد داد .

بخش دهم

بررسی یك منحنی در نزدیکی یکی از نقاط آن

۱۳۴ ـ منحنی ها ئی که معادله آن بصورت $y = f(x)$ داده شده باشد ـ تقعر ـ بررسی یك منحنی درحوالی یکی از نقاط آن بررسی وضعیت منحنی نسبت بمماس درآن نقطه میباشد .

فرض کنیم که تابع $f(x)$ بازاء x_0 متغیر دارای مشتق $f'(x_0)$ بوده یعنی منحنی در نقطه M_0 دارای مماس M_0T غیر موازی Oy میباشد .

تعریف ـ گویند تقعر منحنی در نقطه M_0 بسمت y های مثبت است چنانکه بتوان بازاء تمام مقادیر x نزدیك به x_0 عدد مثبت α را پیدا نمود بطوریکه $|x - x_0| < \alpha$ بوده و عرض نقطهٔ از منحنی که طول آن x است بزرگتر از عرض مربوط بهمان طول روی مماس M_0T باشد .

چنانکه بازاء همان مقادیر x عرض نقطه مربوط بطول x منحنی کوچکتر از عرض نقطه مربوط بهمان طول مماس باشد گویند که در M_0 منحنی تقعر خود را بسمت y های منفی دارد .

P را نقطه برخورد مماس M_0T با خطی موازی Oy گرفته . Y نقطه P از معادله M_0T بدست میآید :

$$Y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

M را نقطه برخورد همان‌خط بامنحنی گرفته اندازهٔ جبری $\overrightarrow{PM}$ مساوی $y - Y$ بوده ومسئله منجر ببررسی علامت این مقدار درحوالی x_0 میباشد . ولی این تفاضل تابعی از x بوده ومساوی : $\varphi(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0)$ میباشد . این تـابع بازاء $x = x_0$ صفر شده و برای شناختن علامتش درحوالی این

مقدار کافی است که جهت تغییراتش‌را درفاصلهٔ که شامل x_0 است بدانیم. بدین منظور مشتق آنرا حساب میکنیم : $\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ این مقدار هم بازاء x_0 صفر شده پس مقدار : $\varphi''(x) = f''(x)$ را حساب میکنیم.

حال عدد مثبت α را طوری انتخاب میکنیم که $f''(x)$ در فواصل :

$(x_0 - \alpha, x_0)$ و $(x_0, x_0 + \alpha)$ دارای یك علامت باشد.

پس از آنجا چند حالت ممکن است اتفاق افتد :

۱ - $f''(x) > 0$ در فواصل $x_0 - \alpha < x < x_0$ و $x_0 < x < x_0 + \alpha$ میباشد تابع $\varphi'(x)$ در هر دو فاصله صعودی بوده چنانکه x صعود نموده و از x_0 بگذرد علامتش از - بعلاوه خواهدشد پس $\varphi(x)$ دارای می‌نیمم‌صفر بوده و بازاء تمام این مقادیر x مثبت خواهد بود. در M_0 تقعر منحنی بسمت y های مثبت‌است. ش۱ .

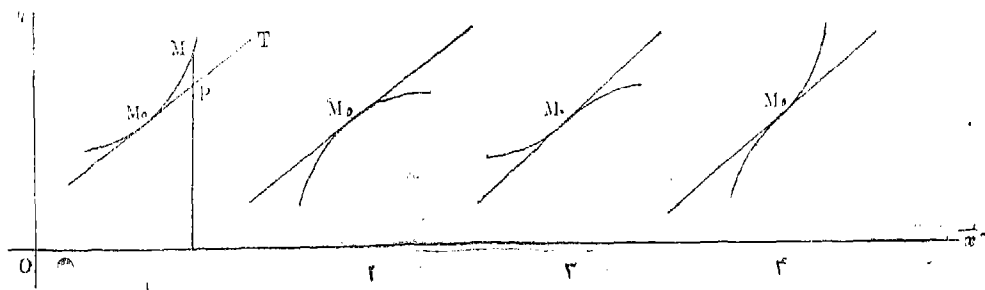
۲- $f''(x) < 0$ درفواصل $x_0 - \alpha < x < x_0$ و $x_0 < x < x_0 + \alpha$

بهمان ترتیب ثابت میشود که تقعر منحنی در M_0 بسمت y های منفی است.

پس بطورکلی نتیجه میشود که چنانچه $f''(x)$ دارای علامت ثابتی در فاصله (a, b) باشد قوس $\widehat{AB}$ مربوطه تماماً دریکطرف مماس واقع میباشد ش ۲ .

۳- $f''(x)$ در فواصل $(x_0 - \alpha, x_0)$ و $(x_0, x_0 + \alpha)$ دارای علامات مختلف است.

در اینحالت جهت تغییرات $\varphi'(x)$ وقتیکه x از x_0 بگذرد تغییر میکند - و چون این تابع بازاء x_0 صفر میشود پس بازاء این مقدار تغییر علامت نخواهد داد

ش ۳۵

و از آنجا نتیجه میشود که جهت تغییرات $\varphi(x)$ عوض نشده و چون $\varphi(x_0)=0$ است $\varphi(x)$ وقتیکه x از x_0 بگذرد تغییر علامت خواهد داد پس دوقوس منحنی C که به M_0 منتهی میشوند دردو طرف مماس M_0T واقع بوده و نقطه M_0 نقطه عطف منحنی خواهد بود . ش ۳ ـ ٤ ـ

۱۳۴ـ منحنی هائی که معادله آن بصورت پارامتری داده شده باشد ـ

منحنی (C) را بمعادلات $x=f(t)$ $y=g(t)$ فرض کرده نقطه $M(x, y)$ و $M_1(x_1, y_1)$ را مربوط بمقادیر t و t_1 پارامتر میگیریم .
مشتق هندسی مرتبه p ام بردار $\overrightarrow{OM}$ را بصورت $\overrightarrow{V}_p$ و تصاویر آنرا روی محور های مختصات به $x^{(p)}$ و $y^{(p)}$ نمایش میدهیم . $\overrightarrow{MV}_p$ برداریکه از M همسنگ $\overrightarrow{V}_p$ کشیده شده است خواهد بود. چنانکه توابع $f(t)$ و $g(t)$ را قابل بسط برحسب فرمول تیلور فرض کرده باشیم خواهیم داشت :

$$\left\{\begin{aligned} x_1-x&=(t_1-t)\,x'+\frac{(t_1-t)^2}{2}x''+\dots+\frac{(t_1-t)^n}{n!}\left[x^{(n)}+\varepsilon\right]\\ y_1-y&=(t_1-t)\,y'+\frac{(t_1-t)^2}{2}y''+\dots+\frac{(t_1-t)^n}{n!}\left[y^{(n)}+\varepsilon_1\right]\end{aligned}\right.$$

ε و ε_1 با بینهایت کوچك شدن t_1-t بینهایت کوچك خواهند شد بستگی های فوق را بصورت هندسی زیر نیز میتوان نوشت :

$$\overrightarrow{MM_1}=(t_1-t)\,\overrightarrow{MV_1}+\frac{(t_1-t)^2}{2!}\,\overrightarrow{MV_2}+\dots+\frac{(t_1-t)^n}{n!}\,\overrightarrow{MW_n}$$

$\overrightarrow{MW_n}$ برداریست که مؤلفه های آن : $x^{(n)}+\varepsilon$ و $y^{(n)}+\varepsilon_1$ بوده و چنانکه t_1 بسمت t میل نماید $\overrightarrow{MW_n}$ بسمت $\overrightarrow{MV_n}$ میل خواهد نمود .

حالت کلی ـ فرض کنیم که نقطه M نقطه خصوصی نباشد چنانکه t_1 بسمت t میل نماید $\dfrac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1-t}$ بسمت $\overrightarrow{MV_1}$ میل خواهد کرد. چنانکه $t_1-t>0$ باشد دو بردار $\dfrac{\overrightarrow{MM_1}}{t_1-t}$ و $\overrightarrow{MM_1}$ همسو وگرنه باسوهای مخالفند . پس میتوان یك عدد $\alpha>0$ پیدا

نمود بطوریکه بازاء مقادیر t_1 واقع در فاصله $(t, t+\alpha)$ دو بردار $\overrightarrow{MM_1}$ و $\overrightarrow{MV_1}$ در یکطرف خط غیر مشخص (D) که از M مرور کرده و مماس در M نباشد واقع بوده و بازاء t_1 واقع در فاصله $(t-\alpha, t)$ دو بردار $\overrightarrow{MM_1}$ و $\overrightarrow{MV_1}$ در دو طرف D واقع شوند.

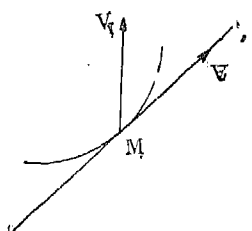
۲ ـ معمولا مشتق دوم $\overrightarrow{MV_2}$ صفر نبوده و حامل آن با $\overrightarrow{MV_1}$ نیز فرق دارد چون برحسب دستور تیلور:

$$\overrightarrow{MM_1} = (t_1 - t)\ \overrightarrow{MV_1} + \frac{(t_1 - t)^2}{2}\ \overrightarrow{MW_2}$$

است پس وقتیکه t_1 بسمت t میل کند $\overrightarrow{MW_2}$ بسمت $\overrightarrow{MV_2}$ میل کرده و از آنجا بازاء t_1 که باندازه کافی نزدیك به t باشد $\overrightarrow{MW_2}$ و $\overrightarrow{MV_2}$ دریك سمت مماس $(\overrightarrow{MV_1})$ واقع خواهند بود. بردار $\overrightarrow{MM_1}$ نیز درهمان طرف بردار $\overrightarrow{MV_2}$ واقع بوده ونتایج بالارا بطریق زیر میتوان خلاصه نمود:

قضیه ـ منحنی C که معادله آن بصورت پارامتری داده شده مفروض میباشد ـ خط D مفروض که از M گذشته وغیر از مماس در آن نقطه است در نظر میگیریم همیشه میتوان یك عدد مثبت α پیدا نمود بطوریکه قوسهای منحنی C مربوط بفواصل $(t, t+\alpha)$ و $(t-\alpha, t)$ دردوطرف این خط واقع شوند.

قوس مربوط بفاصله $(t, t+\alpha)$ درهمان‌طرف مشتق $\overrightarrow{MV_1}$ نیز واقع شده‌است.

۲ـ چنانکه $\overrightarrow{MV_2}$ (مشتق دوم $\overrightarrow{OM}$) وجود داشته ومخالف صفر بوده و همچنین امتداد آن با مماس در M فرق داشته باشد قوسهای منحنی C در حوالی نقطه M و بردار $\overrightarrow{MV_2}$ در یکطرف مماس واقع خواهند بود.

این موضوع را بطور دیگر نیز میتوان گفت:

بردار $\overrightarrow{MV_2}$ درطرف تقعر منحنی ممتد میباشد.

ش ۳٦

تبصره ۱ ـ $\overrightarrow{MV_1}$ همان برداریست که سوی نیم مماس مثبت را برای ما مشخص مینماید.

تبصره ۳ - باید یادآور شد که فرض آنکه $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ صفر نبوده وامتدادشان نیز مختلف باشد بصورت نامساوی : $x'y'' - y'x'' \neq 0$ نوشته میشود .

حالات مخصوص - چنانکه نقطه M نقطه مخصوص نبوده ولی $\overrightarrow{MV}_2$ صفر ویا بامماس دریك امتداد باشد ویا آنکه M نقطه مخصوص باشد $(x' = 0, y' = 0)$ مقدار $x'y'' - y'x''$ در هردو حال صفر خواهد بود . $\vec{V}_p$ را اولین مشتق $\overrightarrow{OM}$ مخالف صفر و $\vec{V}_q$ را اولین بردار مشتق هندسی از مرتبه بالاتر از p که هم امتداد $\vec{V}_p$ نباشد فرض میکنیم .

چنانکه q بزرگتر از $p+1$ باشد بهر بردار $\vec{V}_{p+r}$ $(r = 1, 2, \dots q - p - 1)$ عدد a_r بطوریکه $\vec{V}_{p+r} = a_r \vec{V}_p$ باشد مربوط بوده و فرمول تیلور چنانکه $h = t_1 - t$ قرار دهیم

$$(1) \quad \overrightarrow{MM}_1 = \left[\frac{h^p}{p!} + a_1 \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} + \dots + a_{q-p-1} \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}\right] \overrightarrow{MV}_p + \frac{h^q}{q!} \overrightarrow{MW}_q$$

نوشته میشود. چنانکه h بسمت صفر میل کند $\overrightarrow{MW}_q$ بسمت $\overrightarrow{MV}_q$ میل خواهد کرد. این بستگی را بصورت ساده تر :

$$\overrightarrow{MM}_1 = \frac{h^p}{p!}(1 + \eta)\overrightarrow{MV}_p + \frac{h^q}{q!}\overrightarrow{MW}_q$$

نیز میتوان نوشت . چنانکه h بینهایت کوچك شود η نیز بینهایت کوچك خواهد شد امتداد بردار $\overrightarrow{MP} = \frac{h^p}{p!}(1 + \eta)\overrightarrow{MV}_p$ همان امتداد بردار مماس به C در M بوده و برحسب آنکه h^p مثبت یا منفی باشد دو بردار $\overrightarrow{MP}$ و $\overrightarrow{MV}_p$ همسو یا با سوهای مخالف خواهند بود .

همچنین دو بردار $\overrightarrow{MV}_q$ و $\overrightarrow{MQ} = \frac{h^q}{q!}\overrightarrow{MW}_q$ بازاء مقادیر کوچك h دریکطرف یا دردو طرف مماس برحسب آنکه h^q مثبت یا منفی باشد واقع خواهند بود . پس ازآنجا منحنی C یکی ازاشکال(۳۷) را برحسب زوج یافرد بودن p و q خواهدداشت.

اگر p فرد و q زوج باشدسوی بردار $\overrightarrow{MP}$ چنانکه t_1 ازمقدار t بگذرد تغییر کرده و دو قوس منحنی وقتیکه t_1 از راست یا از چپ بسمت t میل کند نظیر همان

حالت کلی خواهند بود . حالت کلی هم بازاء $p=1$ و $q=2$ نیز بدست آمده است . (ش ۱) .

اگر p و q هردو فرد باشند مقدار $(t_1 - t)^q$ وقتیکه t_1 از t بگذرد تغییر علامت داده ودو قوس منحنی وقتیکه t_1 از راست یا از چپ بسمت t میل کند دردو طرف هرخطیکه از M بگذرد خواهند بود . در اینحال M نقطه عطف بوده (ش۲) وبازاء $p=1$ و $q=3$ مثلا اینحالت اتفاق میافتد. درحالت خاص اخیر $\overrightarrow{MV_1}$ صفر نبوده ولی $\overrightarrow{MV_2}$ صفر یا بامماس دریك امتداد است بدون آنکه $\overrightarrow{MV_3}$ صفر باشد یعنی ($x'y''-y'x''=0$ و $x'y'''-y'x'''\neq 0$) در اینحال میتوان عدد a_1 را پیدانمود بطوریکه : $x''=a_1x'$ و $y''=a_1y'$ باشند. فرمول(۱)هم بصورت :

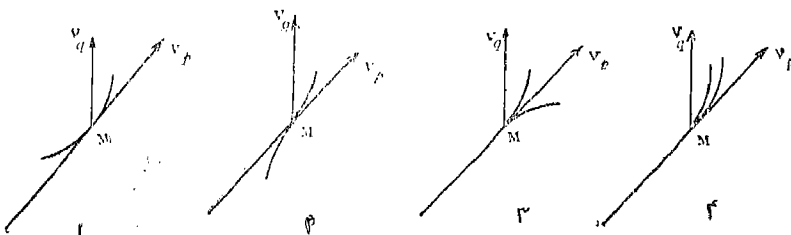
$$\overrightarrow{MM_1}=\left[(t_1-t)+\frac{a_1}{2}(t_1-t)^2\right]\overrightarrow{MV_1}+\frac{(t_1-t)^3}{3!}\overrightarrow{MW_3}$$

اگر p زوج و q فرد باشد دوقوس منحنی درحوالی این نقطه دردوطرف مماس واقع بوده گویندکه M نقطه بازگشت از نوع اول است (ش ۳) .

اینحالت اغلب در نقاط مخصوص اتفاق میافتد در آنحال $\overrightarrow{MV_1}$ صفر و $\overrightarrow{MV_2}$ مخالف صفر و $\overrightarrow{MV_3}$ هم مخالف صفر و بدون آنکه هم امتداد مماس باشد خواهند بود ($p=2$ ، $q=3$) فرمول (۱) درحالت خاص اخیر بصورت :

$$\overrightarrow{MM_1}=\frac{(t_1-t)^2}{2!}\overrightarrow{MV_2}+\frac{(t_1-t)^3}{3!}\overrightarrow{MW_3}$$ نوشته میشود .

وبالاخره چنانکه p و q هردوزوج باشند دوقوس منحنی دریکطرف هرخطیکه از M بگذرد حتی مماس واقع بوده گویندکه M نقطه بازگشت ازنوع دوم میباشد . مثلا بازاء $p=2$ و $q=4$ اینحالت اتفاق خواهد افتاد .

ش ۳۷

۱۳۵ - نقاط عطف - برحسب آنچه که تا بحال گفتیم نقطه عطف نقطه‌ایست که در آن منحنی از هر خطیکه از این نقطه بگذرد مرور مینماید. درچنین نقطهٔ برحسب آنکه معادله بصورت $y = f(x)$ باشد $y'' = 0$ بوده و اگر منحنی بصورت پارامتری داده شده باشد: $x' y'' - y' x'' = 0$ خواهد شد.

ولی طبق آنچه که دیدیم مقدار $x' y'' - y' x''$ ممکن است صفر باشد بدون آنکه منحنی ازمماس مرور نماید. اما بدون درنظر گرفتن این مطلب هر نقطه که مخصوص نبوده ودرآن $x' y'' - y' x'' = 0$ باشد نقطه عطف نامیده میشود. نقاط عطف دارای خواص زیر میباشند:

۱- معادله نقاط برخورد منحنی و مماس در M_0

$$|f(t) - f(t_0)|\, g'(t_0) - |g(t) - g(t_0)|\, f'(t_0) = 0$$

بوده این معادله مقادیر t مربوط باین نقاط را بما میدهد. چنانکه مشتق دوم طرف اول این معادله صفر باشد t_0 ریشه سوم این معادله خواهد بود.

ولی این مشتق دوم $f''(t_0)\, g'(t_0) - g''(t_0)\, f'(t_0)$ در نقاط عطف صفر بوده و از آنجا نتیجه میشود که نقاط عطف نقاطی هستند که خط مماس منحنی را لااقل در سه نقطه منطبق بر نقطه تماس قطع مینماید.

۲- ضریب زاویه مماس در M: $m = \frac{y'}{x'}$ بوده وچون مشتق این مقدار را حساب کنیم: $m' = \frac{x' y'' - y' x''}{x'^2}$ شده و چون در نقاط عطف $x' y'' - y' x'' = 0$ است پس نتیجه میشود که: اولا درنقاط عطف ضریب زاویه مماس از یك ماکزیمم و یا می نیمم میگذرد وثانیاً آنکه جهت تغییرات m وقتیکه M نقطه بازگشت نوع اول باشد تغییر نخواهد کرد. ثالثاً فقط خط مستقیم است که تمام نقاط آن نقاط عطف میباشند زیرا اگر $y'' = 0$ باشد y تابع خطی از x خواهد بود.

۱۳۶- خم چپ در نزدیکی یکی از نقاط آن - صفحه بوسان - منحنی (C) که توسط معادلات: $x = f(t)\,,\ y = g(t)\,,\ z = h(t)$ داده شده

است فرض کرده نقاط $M(x, y, z)$ و $M_1(x_1, y_1, z_1)$ که مربوط بمقادیر t و t_1 پارامترند روی آن درنظرمیگیریم . $\vec{V}_p$ را مشتق هندسی مرتبه p بردار $\overrightarrow{OM}$ نسبت به t و $x^{(p)}$ و $y^{(p)}$ و $z^{(p)}$ را تصاویر این مشتق نیز فرض کرده و $\overrightarrow{MV}_p$ را بردار همسنگ $\vec{V}_p$ که از نقطه M مرور داده‌ایم فرض میکنیم .

چنانکه توابع فوق را برحسب فرمول تیلور بسط دهیم

$$x_1 - x = (t_1 - t)\,x' + \frac{(t_1 - t)^2}{2}\,x'' + \dots + \frac{(t_1 - t)^n}{n!}\left[x^{(n)} + \varepsilon\right]$$

$$y_1 - y = (t_1 - t)\,y' + \frac{(t_1 - t)^2}{2}\,y'' + \dots + \frac{(t_1 - t)^n}{n!}\left[y^{(n)} + \varepsilon_1\right]$$

$$z_1 - z = (t_1 - t)\,z' + \frac{(t_1 - t)^2}{2}\,z'' + \dots + \frac{(t_1 - t)^n}{n!}\left[z^{(n)} + \varepsilon_2\right]$$

ε و ε_1 و ε_2 مقادیری هستند که با بینهایت کوچك‌شدن $t_1 - t$ بینهایت کوچك خواهندشد.

این سه بسط را میتوان بصورت هندسی

$$\overrightarrow{MM}_1 = (t_1 - t)\,\overrightarrow{MV}_1 + \frac{(t_1 - t)^2}{2}\,\overrightarrow{MV}_2 + \dots + \frac{(t_1 - t)^n}{n!}\,\overrightarrow{MW}_n$$

که‌در آن $\overrightarrow{MW}_n$ برداری باتصاویر $x^{(n)} + \varepsilon$ و $y^{(n)} + \varepsilon_1$ و $z^{(n)} + \varepsilon_2$ میباشد خلاصه نمود . چنانچه t_1 بسمت t میل نماید $\overrightarrow{MW}_n$ بسمت $\overrightarrow{MV}_n$ نیز میل خواهدکرد .

صفحه بوسان ـ تعریف ـ نقطهٔ M را ثابت و M_1 را متغیر و نزدیك بآن میگیریم چنانچه صفحهٔ که برخط مماس در M و نقطهٔ M_1 مرور نماید دارای حدی وقتیکه M_1 بسمت M میل کند باشد آن صفحه را در حد صفحه بوسان منحنی در نقطه M نامند .

چنانکه این تعریف را درباره خمهای هامنی بکار بریم خواهیم دید که صفحه منحنی همان صفحه بوسان برای نقاط آن خواهد بود .

قضیه ۱ـ چنانچه مشتقات دوم مختصات نقطه M منحنی چپ همگی بازاء پارامتر آن نقطه صفر نبوده و اگر این مشتقات دوم متناسب با مشتقات اول نباشند منحنی در نقطه M دارای صفحه بوسان خواهد بود .

اثبات ـ با آنچه که نسبت بمعادله منحنی و مختصات نقاط M و M_1 فرض کردیم بازاء مقادیر t_1 نزدیك به t فرمول تیلور را بصورت :

$$\overrightarrow{MM_1} = (t_1 - t)\ \overrightarrow{MV_1} + \frac{(t_1 - t)^2}{2}\ \overrightarrow{MW_2}$$

میتوانیم بنویسیم . بردار (x', y', z') $\overrightarrow{MV_1}$ مشتق هندسی اول بردار $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{MW_2}$ برداریست که بسمت (x'', y'', z'') $\overrightarrow{MV_2}$ وقتیکه t_1 بسمت t میل نماید میل خواهد کرد .

امتداد بردار $\overrightarrow{MV_1}$ مماس در M بوده و صفحه ایکه بر این مماس و نقطهٔ M_1 بگذرد شامل $\overrightarrow{MW_2}$ نیز خواهد بود . وچنانچه نقطه M_1 بسمت M میل کند حد این صفحه حد صفحه دو بردار $\overrightarrow{MV_1}$ و $\overrightarrow{MV_2}$ خواهد شد. (البته فرض شده است که $\overrightarrow{MV_2}$ هم دارای امتداد مماس $\overrightarrow{MV_1}$ نباشد) . پس قضیه بدین‌ترتیب اثبات میشود . این‌قضیه را بصورت زیر نیز میتوان بیان نمود .

با شرایطیکه قبلا گفتیم یعنی دوبردار $\overrightarrow{MV_1}$ و $\overrightarrow{MV_2}$ مخالف صفر بوده وامتداد های مختلف داشته باشند صفحهٔ که شامل این دو بردار بوده و از M بگذرد صفحه بوسان نقطه M خواهد بود .

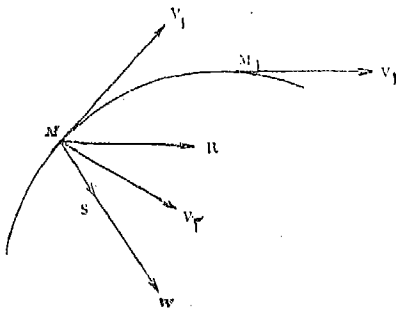
۱۳۷ ـ معادله صفحه بوسان ـ صفحهٔ بوسان چنانکه گفتیم صفحه‌ایست که‌از نقطه M گذشته و شامل دو بردار $\overrightarrow{MV_1}$ و $\overrightarrow{MV_2}$ باشد پس معادله اش بصورت :

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

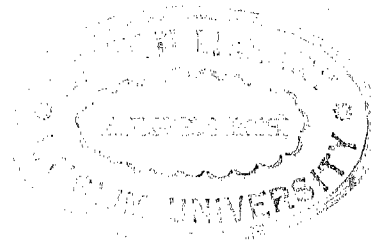
نوشته خواهد شد .

تبصره ـ چنانکه پارامتر t را زمان و مختصات x ، y ، z را مختصات نقطه متحرك M بگیریم گوئیم که‌صفحه بوسان شامل سرعت وشتاب نقطه مادی M میباشد.

۱۳۸ ـ قضیه ۳ ـ نقاط M و M_1 ومماسهای این نقاط را فرض کرده حدصفحهٔ که برمماس در M بموازات‌مماس در M_1 مرور نماید وقتیکه M_1 بسمت M میل کند صفحه بوسان خواهد بود .

x'_1 ، y'_1 ، z'_1 را مشتقات x ، y ، z بازاء مقدار t_1 پارامتر مربوط بنقطه M_1 گرفته بردار $\overrightarrow{MR}$ را بتصاویر این مقادیر فرض میکنیم . صفحه Q که توسط دو بردار $\overrightarrow{MV_1}$ و $\overrightarrow{MR}$ مشخص شده است در نظر گرفته این صفحه شامل بردار $\overrightarrow{MS}$ که همسنگ $\overrightarrow{V_1R}$ از نقطه M رسم شده‌است میباشد . پس از آنجا این صفحه شامل بردار $\overrightarrow{MW_1} = \frac{\overrightarrow{MS}}{t_1 - t}$ نیز خواهد بود . حال تصاویر این بردار بترتیب

ش ۳۸

$\frac{x'_1 - x'}{t_1 - t}$ و $\frac{y'_1 - y'}{t_1 - t}$ و $\frac{z'_1 - z'}{t_1 - t}$ بوده وقتیکه t_1 بسمت t میل کند این مقادیر بسمت مشتقات دوم x'' ، y'' ، z'' میل خواهند نمود . و ازآنجا بردار $\overrightarrow{MW_1}$ بسمت بردار $\overrightarrow{MV_2}$ و صفحه Q بسمت صفحه بوسان نقطه M میل خواهندکرد .

۱۳۹ ـ قائم اصلی ـ بین تمام خطوط قائم در نقطه M قائم واقع در صفحه بوسان به‌قائم اصلی موسوم وهمچنین بین این‌قائمها قائم عمود بصفحه بوسان بی‌نرمال نامیده میشود . سه امتداد مماس وقائم اصلی و بی نرمال درهر نقطه M یك سه وجهی که بسه وجهی‌فرنه (Frenet) موسوم‌است تشکیل‌میدهند صفحه TMN صفحه بوسان صفحه BMN صفحه قائم و صفحه TMB صفحه رکتیفیان نقطه M نامیده میشوند .

بخش یازدهم

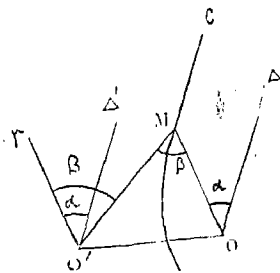
رسم منحنیات

۱ - رسم منحنی که معادله آن بصورت $y = f(x)$ داده شده باشد

شاخه بینهایت ـ مجانب

۱۴۰ـ شاخه بینهایت ـ چنانکه فاصله نقطه M واقع روی یك منحنی مسطحه یا فضائی از نقطه ثابت O بینهایت شود گویند نقطه M یك شاخه بینهایت منحنی را پیموده و یا آنکه بسمت بینهایت دور میشود .

امتداد مجانب ـ اگر نقطه M واقع روی یك شاخه یك منحنی مسطحه یا فضائی را بدو نقطه ثابت O و O' وصل کنیم چنانکه با بینهایت دور شدن این نقطه دوخط OM و O'M بسمت دوحد $O\triangle$ و $O'\triangle'$ موازی میل کنند امتداد مشترك این دوحد را امتداد مجانب شاخه بینهایت منحنی نامند .

چنانکه دیده میشود این امتداد مشترك بستگی بنقطه ثابت نخواهد داشت .

فرض کنیم که حد خط OM وقتیکه M بسمت بینهایت دورشود خط $O\triangle$ باشد زاویه $\alpha = \triangle OM$ دراینحال بسمت صفر میل کرده و خط $O'\mu$ موازی OM و همسوی آن بسمت خط $O'\triangle'$ موازی $O\triangle$ میل خواهد کرد .

چنانکه $\beta = \widehat{OMO'}$ باشد .

ش ۳۹

$$\sin \beta = OO' \times \frac{\sin OO'M}{OM}$$

خواهدشد حال طرف دوم این بستگی بسمت صفر میل کرده وازآنجاطرف اول آن نیز

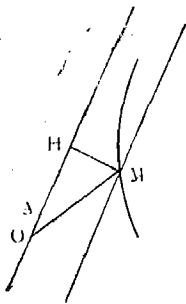
بسمت صفر یعنی $M O' \mu = \beta$ بسمت صفر میل خواهد کرد . و چون خواه سه خط $O'\mu$ و $O'\Delta'$ و $O'M$ در یك صفحه بوده و یا در یك صفحه نباشند گوشه $M O' \Delta'$ منتها مساوی مجموع زوایای α و β که هردو بسمت صفر میل میکنند میباشد از آنجا این زاویه بسمت صفر میل کرده و $O'M$ بسمت $O'\Delta'$ میل خواهد کرد .

نقطه M مشترك بین OM و $O'M$ درحد نقطه بینهایت امتداد Δ خواهد شد .

تبصره ـ شاخه بینهایت هرمنحنی همیشه دارای امتداد مجانب نمیباشد مثلا درمنحنی : $y = x(2 + \sin x)$ y بازاء $x = \infty$ بینهایت میشود ولی ضریب زاویه خط OM مساوی $2 + \sin x$ بوده و بین مقادیر ۱ و ۳ نوسان خواهد کرد . و بازاء x بینهایت بسمت هیچ حد معینی میل نخواهد کرد .

۱۴۱ـ مجانب ـ خط A را مجانب یك شاخه منحنی گویند چنانچه فاصله نقطه M منحنی ازاین خط وقتیکه این نقطه روی شاخه منحنی بسمت بینهایت دورشود بسمت صفر میل نماید . ویاآنکه خط موازی A که از M گذشته باشد بسمت A میل نماید .

قضیه ـ چنانکه خط A مجانب C باشد امتداد آن امتداد مجانب خواهد بود .

ش ٤٠

نقطه O را روی A گرفته MH را فاصله نقطه M منحنی از خط مجانب فرض میکنیم . این فاصله چنانکه M بسمت بینهایت رود صفرشده ودر نتیجه زاویه O مثلث قائم MOH نیز صفر خواهد شد . پس از آنجا خط OM بسمت A میل کرده وقضیه ثابت میشود .

بحث ـ δ را امتداد مجانب شاخه بینهایت منحنی C فرض کرده چنانکه $M\alpha$ موازی آن از نقطه M باشد با بینهایت دور شدن M روی C سه حالت ممکن است اتفاق افتد :

۱ـ خط $M\alpha$ بسمت وضعیت حد A بطوریکه فاصله نقطه M ازاین خط بسمت صفر میل کند میل خواهد کرد در اینحال خط A مجانب منحنی خواهد بود .

۲ـ خط $M\alpha$ بسمت بینهایت دور میشود گویند شاخه C شلجمی شکل است .

۳ـ خط $M\alpha$ بسمت هیچ وضعیت حدی میل نمینماید .

تبصره ۱ ـ نام شلجمی شکل از این جهت است که چون در معادله شلجمی $y^2 = 2px$ شاخه $y = \sqrt{2px}$ را بگیریم نسبت $\frac{y}{x}$ وقتیکه x بینهایت شود صفر شده و از آنجا امتداد Ox امتداد مجانب خواهد بود و چون y بازاء $x = \infty$ بینهایت میشود پس خط موازی $x'x$ که از نقطه $M(x, y)$ مرور کرده باشد بسمت بینهایت دور خواهد شد .

تبصره ۲ ـ یك مثال از منحنیات نوع سوم منحنی $y = \sin x$ میباشد وقتیکه x بینهایت شود $\frac{y}{x}$ بسمت صفر میل کرده وازآنجا خطیکه نقطه O را به M وصل میکند بسمت Ox میل خواهد کرد . پس $x'x$ امتداد مجانب بوده ولی خط موازی $x'x$ که از M مرور نماید بسمت حدی میل نخواهد کرد .

۱۴۲ ـ قضیه ـ چنانکه مماس در نقطه M بر منحنی C وقتیکه M بسمت بینهایت دور شود بسمت وضعیت حد A میل نماید خط A مجانب شاخه بینهایت C خواهد بود .

اثبات ـ α را نقطه بینهایت خط مجانب A گرفته این نقطه را میتوان نقطه بینهایت شاخه منحنی نیز دانست . چنانچه از نقطه M منحنی خطی موازی A رسم کنیم این خط همان $M\alpha$ خواهد بود و چون M بسمت α میل کند خط A وضعیت حد $M\alpha$ را میتوان مماس برمنحنی درنقطه α دانست . پس میتوان مجانب هر شاخه منحنی را مماس درنقطه بینهایت آن شاخه فرض نمود .

۱۴۳ ـ بررسی شاخه های بینهایت منحنیاتیکه معادلات آنها بصورت $y = f(x)$ داده شده باشند .

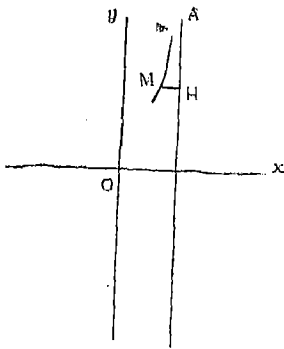
میخواهیم شاخه‌های بینهایت وهمچنین مجانب های این منحنیات را درصورت موجود بودن تعیین نمائیم و بعلاوه در صورت اخیر بررسی وضعیت منحنی نسبت بمجانبش یعنی طرفی که منحنی نسبت بمجانبش قرار گرفته است نیز منظور میباشد .

برای آنکه نقطهٔ شاخه بینهایت منحنی را بپیماید لازم و کافی است که لااقل یکی از مختصات x و y آن بینهایت شوند. بدین منظور حالات مختلف را بررسی مینمائیم :

۱ ــ چنانکه بازاء $x=a$ مقدار y بینهایت شود خط A بمعادله : $x=a$ مجانب منحنی خواهد بود .

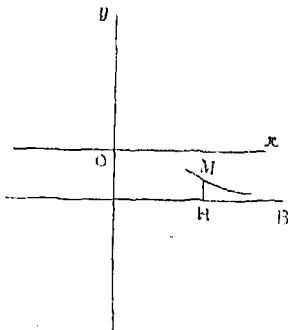
x و y را مختصات نقطه M گرفته و بعلاوه فرض کنیم که بازاء مقادیر x که از سمت چپ به a نزدیك میشوند y بسمت بینهایت میل کند .

خط MH را موازی $x'x$ کشیده تا A را در H قطع نماید. حال : $\overline{HM}=x-a$ فاصلهٔ نقطه M از خط A بوده و بسمت صفر میل خواهد نمود.

پس A مجانب منحنی خواهد بود شاخه منحنی درچپ مجانب بوده و بعلاوه چنانکه بدانیم y با چه علامتی بینهایت میشود سمتیکه نقطه M بدان میرود خواهیم دانست وازآنجا وضعیت منحنی نسبت بمجانبش معین خواهد شد .

ش ۴۱

چنانکه بازاء مقادیر x که از سمت چپ یا از سمت راست به a نزدیك شوند y بینهایت شود منحنی دارای دوشاخه مجانب به A خواهدبود. یکی از آنها درچپ ودیگری در راست این خط واقع میباشند .

۲ــ چنانکه بازاء x بینهایت y بسمت حد b میل کند خط B بمعادله $y=b$ مجانب منحنی خواهدبود

فرض کنیم که چنانکه x بازاء مقادیر مثبت بسمت ∞ میل کند y بسمت b میل خواهد کرد . خطی موازی $y'y$ از نقطه (x, y) M منحنی کشیده تا B را در H قطع نماید $\overline{HM}=y-b$ فاصله نقطه M از خط B بوده و بسمت صفر میل مینماید . پس ازآنجا خط B مجانب منحنی ونقطه M در سمت راست B روی شاخه مربوطه به بینهایت میرود .

ش ۴۲

برای تکمیل بررسی وضعیت منحنی نسبت بمجانب کافی است علامت $y-b$ را بازاء مقادیر بزرگ x بدانیم . چنانکه $y-b$ همیشه مثبت باشد M بالای B واقع شده واگر منفی باشد M زیر خط B واقع خواهد بود .

چنانکه بازاء مقادیر هم مثبت وهم منفی x که بسمت بینهایت میل کنند y بسمت b میل نماید دوشاخه منحنی مجانب به B که یکی درچپ ودیگری درراست خواهد بود وجود خواهند داشت .

تبصره ۱ - برای تعیین علامت $y-b$ که بازاء x بینهایت بسمت صفر میل میکند میتوان از بسط محدود $y-b$ برحسب قوای $\frac{1}{x}$ استفاده نمود .

۳- چنانکه بازاء x بینهایت y بینهایت شود. بترتیب سه‌موضوع امتداد مجانب مجانب ووضعیت منحنی نسبت بمجانب را بررسی مینمائیم .

امتداد مجانب - نقطهٔ $M(x, y)$ را روی منحنی گرفته نسبت $\frac{y}{x}$ ضریب زاویهٔ خط OM را تشکیل میدهیم چنانکه x بسمت بینهایت میل کند چندحالت‌ممکن است اتفاق افتد :

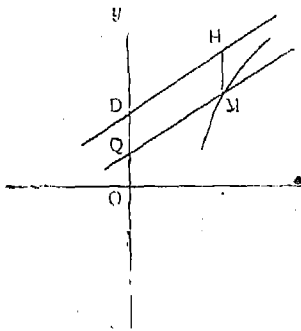
اگر نسبت $\frac{y}{x}$ بسمت هیچ حدی میل نکرده و بینهایت‌هم نشود شاخه مربوطه دارای امتداد مجانب نخواهد بود .

چنانکه $\frac{y}{x}$ بینهایت شود امتداد Oy امتداد مجانب بوده و چون x بینهایت میشود خطموازی Oy که از M مرورکرده باشد به‌بینهایت‌خواهد رفت دراینحال M شاخه شلجمی شکلی را میپیماید .

چنانکه $\frac{y}{x}$ بسمت صفر میل کند امتداد Ox امتداد مجانب بوده و چون y بینهایت میشود خط موازی این امتداد که از M گذشته باشد به‌بینهایت خواهدرفت پس شاخه منحنی شلجمی شکل است .

و بالاخره چنانکه $\frac{y}{x}$ بسمت c مخالف صفرمیل نماید شاخه بینهایت مربوطه دارای امتداد مجانبی بضریب زاویه c خواهد بود .

مجانب - چنانکه $\frac{y}{x}$ بسمت $c \neq 0$ میل نماید معادله خطیکه از نقطه $M(x, y)$ منحنی گذشته و با این ضریب زاویه باشد نوشته وضعیت حد این خط را بازاء x بینهایت بررسی مینمائیم . معادله این خط : $Y - y = c(X - x)$ بوده و محور Oy را در نقطهٔ Q بعرض $\delta = y - cx$ قطع مینماید . برای تعیین وضعیت حد این خط کافی است حد این مقدار را که عرض ازمبدء خط نامیده میشود تعیین نمائیم .

چنانکه $y - cx$ بینهایت شود شاخه منحنی شلجمی شکل است .

چنانکه $y - cx$ بسمت حد d میل نماید خط MQ بسمت A بمعادله :

$$Y = cX + d$$

میل نموده این خط مجانب شاخه منحنی خواهد بود .

و بالاخره ممکن است که شاخه منحنی مجانب نداشته و شلجمی شکل هم نباشد و این درحالتی است که $y - cx$ بسمت هیچ حدی میل نکرده و بینهایت هم نباشد مثلا درباره منحنی $y = x - \sin x$ این حالت پیش خواهد آمد .

ش ٤۳

وضعیت شاخهٔ منحنی نسبت بمجانب - H را نقطه برخورد مجانب A باخطیکه از M بموازات Oy کشیده‌ایم فرض نموده مقدار $\overline{HM} = y - cx - d$ میباشد برای تعیین وضعیت منحنی نسبت بمجانبش علامت این مقدار را که بازاء $x = \infty$ صفر میشود تعیین مینمائیم .

چنانکه $y - cx$ بازاء مقادیر مثبت وهمچنین بازاء مقادیر منفی x که بسمت ∞ میل میکنند بسمت همان حد d میل کند منحنی دارای دوشاخه بینهایت مجانب به A بوده یکی از آنها درراست و دیگری در چپ این خط واقع میباشند .

پس دستورات بالا را بدینطریق خلاصه میکنیم :

چنانکه $\frac{y}{x}$ بازاء x بینهایت بسمت c میل کند ، c ضریب زاویه امتداد مجانب خواهد بود .

چنانکه $y - cx$ بازاء x بینهایت بسمت d میل کند خط : $Y = cX + d$ مجانب منحنی میباشد .

برای تعیین وضعیت منحنی نسبت بمجانب علامت $y - cx - d$ را بازاء مقادیر بزرگ x تعیین میکنیم . علامت این مقدار وضعیت منحنی‌را نسبت بمجانبش بما خواهد داد .

حالت مخصوص - برحسب آنچه که دیدیم چنانکه $M(x, y)$ یک‌شاخه بینهایت منحنی که مجانب بخط A بمعادله : $Y = cX + d$ باشد بپیماید y را میتوان بصورت : $y = cx + d + \varphi(x)$ که در آن $\varphi(x)$ بازاء $x = \infty$ صفر میشود نوشت .

و برعکس چنانکه بتوانیم y منحنی‌را بصورت فوق بنویسیم چنانچه H را نقطهٔ بطول x ازخط A بمعادله : $Y = cX + d$ فرض‌کنیم $\overline{HM} = y - cx - d$ میشود . این مقدار بازاء $x = \infty$ بسمت صفر میل نموده ودر نتیجه فاصله نقطه M ازخط A که منتهی مساوی HM است بسمت صفر میل خواهد نمود . وازآنجا شاخه منحنی مجانب A خواهد بود .

پس از آنجا نتیجه میشود که هرگاه بتوان معادله منحنی را بصورت :

$y = cx + d + \frac{a_0}{x^p} + \frac{\varepsilon}{x^p}$ نوشت بدون محاسبه معادله‌مجانب ووضعیت منحنی را نسبت بمجانب خواهیم داشت .

و بطورکلی چنانکه بتوان معادله منحنی را بصورت :

$$y = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k + \frac{a_0}{x^p} + \frac{\varepsilon}{x^p}$$

نوشت بطوریکه ε بینهایت کوچک با $\frac{1}{x}$ باشد منحنی $Y = b_0 x^k + \cdots + b_k$

را مجانب منحنی مفروض نامند زیرا که $Y - y$ دو منحنی با بینهایت شدن x صفر خواهد شد .

رسم منحنی که معادله آن بصورت $y = f(x)$ داده شده باشد .

۱۴۴- برای رسم چنین منحنی دستورات زیر را بترتیب باید اجرا نمود :

۱ـ با استفاده ازمتناوب بودن تابع $f(x)$ درصورتیکه تابع تناوبی باشد فاصله لازم جهت تغییرات x را بدست میآوریم این فاصله باید طوری باشدکه با تغییر x در آن تمام‌منحنی‌رسم‌شود . مقادیر x راکه بازاء آنها تابع پیوسته نبوده یامشخص نباشد نیز معلوم میکنیم .

۲ـ مقادیر تابع را بازاء این نقاط حساب‌میکنیم . نقاط برخوردمنحنی بامحور ها را در صورتیکه اشکال نداشته باشد معلوم میکنیم .

۳ـ شاخه‌های بینهایت منحنی ومجانبهارا بررسی میکنیم . پس‌ازبدست‌آوردن این نتائج میتوان منحنی را تقریباً رسم نمود .

۴ـ برای بدست آوردن شکل منحنی بصورت دقیقتر باید تغییرات تابع $f(x)$ را بازاء مقادیر x بررسی نمود و بخصوص مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع را باید بدست آورد .

۵ـ چنانچه بررسی علامت $f''(x)$ اشکال نداشته باشد نقاط عطف وسمت تقعر منحنی را باید تعیین نمود .

باید یادآورشد که درحالاتیکه $f''(x)$ بصورت ساده درآید بررسی تقعرمنحنی وضعیت منحنی نسبت بمجانبش را معلوم مینماید .

تبصره ـ دربعضی حالات رسم منحنیات کمکی راهنمائی بزرگی دررسم منحنی مینماید مثلا درصورتیکه معادله منحنی بصورت : $y = f(x) + g(x)$ نوشته شود چنانچه منحنی $f(x)$ را رسم نمائیم بااضافه مقادیر $g(x)$ بعرض نقاط آن منحنی مطلوب را خواهیم داشت .

۴- رسم منحنی که معادله آن بصورت پارامتری داده شده باشد.

۱۴۵ - نقاط مضاعف - نقاط مکرر - منحنی C که مختصات یکی از نقاط آن برحسب پارامتر t بصورت :

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad (1)$$

داده شده است فرض کرده چنانکه بازاء دو مقدار مختلف t_1 و t_2 بستگی های :

$$f(t_1) = f(t_2) \qquad g(t_1) = g(t_2) \qquad (2)$$

برقرار باشند نقطه $M(t)$ بازاء دو مقدار t_1 و t_2 ازیك نقطه A مرور کرده ودوشاخه منحنی از این نقطه خواهند گذشت گویند چنین نقطه نقطه مضاعف میباشد . تعیین این نقاط از حل دستگاه (۲) بدست آمده و بطور کلی گویند A نقطه مکرر میباشد چنانکه M بازاء مقادیر مختلف t_1 و $t_2 \cdots t_p$ از همان نقطه A بگذرد .

۱۴۶ - شاخه های بینهایت - ممکن است نقطه $M(t)$ بازاء مقادیر بینهایت t وهمچنین بازاء مقادیر مشخص t بسمت بینهایت دورشود . وچون بررسی این مطلب در هردو حالت یکسان است از اینجهت فرض میکنیم که چون t بسمت α میل کند :

اولا فقط یکی از مختصات بینهایت شود - فرض کنیم که مثلا وقتیکه t بسمت α میل میکند y بینهایت شده و x بسمت a میل نماید نقطه $M(x, y)$ شاخه منحنی مجانب بخط A بمعادله : $X - a = 0$ را پیموده و برای تعیین وضعیت منحنی نسبت بمجانب باید علامتیکه باآن y بینهایت وهمچنین علامتیکه باآن $x - a$ صفر میشود وقتیکه t بازاء مقادیر کوچکتر و یا بزرگتر از α بسمت α میل میکند تعیین نمائیم .

چنانکه t بسمت α میل کند x بسمت بینهایت و y بسمت b میل نمایند شاخه منحنی مجانب بخط : $Y - b = 0$ خواهد شد .

برای تعیین وضعیت منحنی نسبت بمجانبش علامتیکه با آن x بینهایت شده و $y - b$ صفر میشود وقتیکه t بسمت α بازاء مقادیر بزرگتر و یا کوچکتر از این عدد میل کند تعیین مینمائیم .

تبصره - فرض کنیم که چنانچه t بسمت α میل کند y بینهایت شده ولی x بسمت حدی میل ننماید . در اینحال نسبت $\frac{y}{x}$ بینهایت شده و امتداد Oy امتداد مجانب میباشد . و چون بنا بفرض x دارای حدی نبوده و بینهایت هم نمیباشد خط موازی Oy که از نقطه $M(x, y)$ رسم شده باشد دارای حدی نبوده و در نتیجه شاخه مربوطه دارای مجانب نمیباشد .

ثانیاً هر دو مختصات بینهایت میشوند - در اینحال همانطور که در پیش گفتیم باید $\frac{y}{x}$ را حساب نمود : اگر $\frac{y}{x}$ بسمت صفر میل کند امتداد Ox امتداد مجانب بوده و چون y بینهایت میشود شاخه مربوطه شلجمی شکل است . اگر $\frac{y}{x}$ بینهایت شود امتداد Oy امتداد مجانب بوده و چون x بینهایت میشود باز شاخه مربوطه شلجمی شکل است . چنانکه $\frac{y}{x}$ بسمت c میل نماید امتدادیکه ضریب زاویه آن c است امتداد مجانب خواهد بود . در اینحال حد $y - cx$ را حساب مینمائیم . اگر حد آن بینهایت شود شاخه شلجمی شکل و اگر بسمت d میل کند خط A بمعادله : $Y = cX + d$ مجانب خواهد بود . برای تعیین وضعیت منحنی نسبت بمجانبش علامتیکه با آن یکی از مختصات مثلا x بینهایت شده و علامتیکه با آن مقدار $y - cx - d$ صفر میشود وقتیکه t بازاء مقادیر بزرگتر و یا کوچکتر از α بسمت این عدد میل نماید تعیین مینمائیم . علامت x انتهای مجانب که در آن شاخه منحنی واقع است و علامت $y - cx - d$ سمتیکه منحنی نسبت به مجانب قرار دارد معلوم مینمایند .

۱۴۷ - طریقه رسم منحنی که بصورت پارامتری تعیین شده باشد .

۱ - فاصله کافی که با تغییر پارامتر در آن تمام منحنی را داشته باشیم معلوم میکنیم . و بخصوص چنانکه پارامتر t توسط خطوط مثلثاتی داده شده باشد کوچکترین دوره تناوب مشترك این توابع یعنی کوچکترین عدد مثبت P بطوریکه :

$$f(t+P) = f(t) \quad \text{و} \quad g(t+P) = g(t)$$

باشند تعیین مینمائیم . چنانکه مثلا ضرایب t که در این خطوط مثلثاتی هستند

کسور $\frac{p}{q}$ و $\frac{p'}{q'}$ و . . . . باشند اگر M را کوچکترین مضرب مشترک مخرجهای آنها یعنی q ، q' ... فرض کنیم $2\pi M$ دوره تناوب مشترک توابع f و g خواهد بود. در اینحال باید همیشه بررسی نمود که آیا میتوان جزء صحیحی ازاین دوره تناوب مثلا πM را دوره تناوب گرفت یاخیر.

پس ازتعیین P کافی است t را برای بدست آوردن تمام منحنی در فاصلهٔ غیر مشخص بدامنه P مثلا $(a, a+P)$ تغییر دهیم.

تبصره - چنانکه با تغییر t به $t+P$ تابع $f(t)$ به $f(t)+x_0$ و تابع $g(t)$ به $g(t)+y_0$ که در آنها x_0 و y_0 مقادیر ثابتند تغییر یابند برای بدست آوردن منحنی در فاصله $(a+P, a+2P)$ کافی است که قوس مربوط به $(a, a+P)$ را انتقالی بمؤلفه‌های (x_0, y_0) بدهیم. این مطلب مثلا درمورد سیکلوئید پیش میآید.

۲- باید حتی الامکان بااستفاده ازتقارن منحنی فاصله لازم را کم نمود. چنانکه بازاء هر مقدار t این فاصله بتوان مقدار دیگر t' را پیدا نمود بطوریکه نقاط مربوط باین دو پارامتر M و M' نسبت بیک خط یایک نقطه قرینه باشند منحنی مزبور نسبت باین خط یا این نقطه قرینه خواهد بود.

وبخصوص چنانکه بازاء مقادیر t و t' : $f(t')=f(t)$ و $g(t')=-g(t)$ باشد Ox محور تقارن

وچنانکه : $f(t')=-f(t)$ و $g(t')=g(t)$ باشد Oy محور تقارن

وچنانکه : $f(t')=-f(t)$ و $g(t')=-g(t)$ باشد مبداء مختصات نقطه تقارن

وچنانکه : $f(t')=g(t)$ و $g(t')=f(t)$ باشد نیمساز اول محور تقارن

وچنانکه : $f(t')=-g(t)$ و $g(t')=-f(t)$ باشد نیمساز دوم محور تقارن خواهند بود. حالاتیکه بیشتر پیش میآیند در زیر بررسی مینمائیم:

چنانکه : $t'=t+\frac{P}{2}$ باشد کافی است t را در فاصله بدامنهٔ $\frac{P}{2}$ مثلا $(a, a+\frac{P}{2})$ تغییر داده وبعد قسمت مربوط بفاصله $(a+\frac{P}{2}, a+P)$ را توسط تقارن مربوطه تکمیل نمائیم.

چنانکه : $t' = a - t$ که در آن a مقدار ثابتی است باشد فاصله مطلوب را طوری انتخاب میکنیم که $\frac{a}{2}$ وسط آن واقع باشد چنانچه P دامنه این فاصله فرض شود فاصله $\left(\frac{a}{2}-\frac{P}{2}\ \text{و}\ \frac{a}{2}+\frac{P}{2}\right)$ بدو فاصله $\left(\frac{a}{2}-\frac{P}{2}\ \text{و}\ \frac{a}{2}\right)$ و $\left(\frac{a}{2}\ \text{و}\ \frac{a}{2}+\frac{P}{2}\right)$ تجزیه شده و چون یکی از آنها بوسیله تقارن مربوطه از دیگری نتیجه میشود کافی است که منحنی را در هریك از دو فاصله اخیر رسم کرده و بعد منحنی را توسط تقارن تکمیل نمائیم . و مثلا اگر $t' = -t$ باشد کافی است منحنی را در فاصله $\left(0 , \frac{P}{2}\right)$ رسم نمائیم .

۳ ـ پس از تعیین فاصله تغییرات لازم این فاصله را بفواصل جزئی که در آنها توابع f و g مشخص و پیوسته باشند تجزیه نموده مقادیر این توابع را بازاء t که بسمت حدود این فواصل میل کند و همچنین درصورت لزوم بازاء $t = \infty$ حساب میکنیم . سپس ببررسی شاخه های بینهایت میپردازیم بعد از آن تمام اطلاعات که ممکن است از روی توابع f و g بدست آورد (علامت x و y و نقاط برخورد با محورها وغیره) را و همچنین نقط برخورد منحنی با مجانبها را در صورتیکه بآسانی بدست آیند یاد داشت میکنیم .

بیشتر اوقات با بدست آوردن آنچه که تابحال گفته شد ممکن است منحنی را رسم نمود .

٤ـ برای رسم منحنی بادقت بیشتر باید تغییرات توابع f و g را بررسی نمود . و در حالتیکه نقاط مضاعفی بنظر میرسد باید آنها را تعیین نمود .

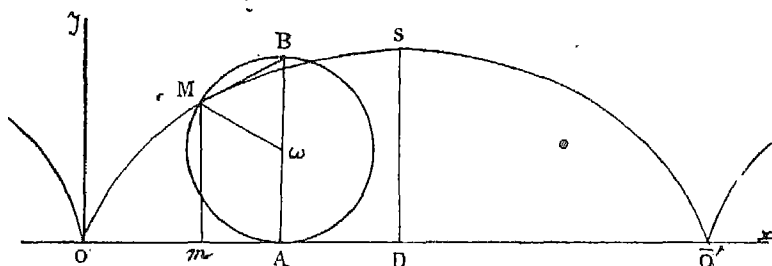
٥ـ درصورتیکه توابع $f(t)$ و $g(t)$ اجازه دهند تقعر منحنی را باید بررسی کرد . و همانطور که در مورد منحنیات $y = f(x)$ گفتیم این بررسی ممکن است وضعیت منحنی نسبت بمجانبها را بما بدهد .

مثال ـ سیکلوئید ـ منحنی حاصل از حرکت نقطه M یك دایره ، چنانکه آن دایره بدون سر خوردن درروی یك خط ثابتی دور بزند سیکلوئید نامیده میشود .

خط ثابت را محور Ox وامتداد حرکت را امتداد مثبت آن و مبداء مختصات را یکی از نقاط Ox که در حین حرکت دایره منطبق بر M باشد فرض میکنیم . محور Oy را در همان سمت دایره نسبت به Ox راستادار کرده و a را شعاع دایره میگیریم .

مرکز ω دایره را به A و M وصل کرده ویادآور میشویم که حرکت این شعاع در جهت عکس میباشد .

زاویه $(\omega M, \omega A)$ را پارامتر t گرفته ومختصات M را نسبت بآن مینویسیم .

ش ٤٤

بدین منظور دوره $OA\ \omega M$ را روی Ox و Oy تصویر میکنیم .

$$x = \overline{OA} + a \cos(\omega M, Ox) \qquad y = a + a \cos(\omega M, Oy) \qquad (۱)$$

چون دایره بدون سر خوردن روی Ox میچرخد پس طول OA مساوی قوس AM یعنی Rt خواهد بود .

ازطرفی : $(\omega M, Ox) = (Oy', Ox) - (Oy', \omega M) + ۲k\pi = \frac{\pi}{۲} + t + ۲k\pi$

$(\omega M, Oy) = (Oy', Oy) - (Oy', \omega M) + ۲k\pi = \pi + t + ۲k\pi$

بوده وازآنجا : $\cos(\omega M, Ox) = -\sin t \quad , \quad \cos(\omega M, Oy) = -\cos t$

میباشند . چنانکه در فرمولهای (۱) مقادیرشانرا قرار دهیم دستگاه :

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(۱ - \cos t) \qquad (۲)$$

که نمایش سیکلوئید را میدهد خواهیم داشت .

چنانکه دیده میشود توابع x و y پیوسته و مشخص بوده وچنانکه به t نموی

مساوی π ۲ بدهیم y تغییر نکرده و به x باندازهٔ a π ۲ اضافه خواهدشد. ازآنجا نتیجه میشود که سیکلوئید از بینهایت قوس مساوی که همگی از یکی از آنها توسط یك انتقال موازی Ox و مساوی a π ۲k نتیجه میشود تشکیل شده است . این نتیجه از تعریف هندسی منحنی نیز واضح میباشد . جدول تغییرات توابع x و y در حالیکه t بین (۰ , π۲) تغییر نماید بصورت زیر میباشد .

t	۰		π		π ۲
x'	۰	+	a ۲	+	۰
x	۰	↗	πa	↗	πa ۲
y'	۰	+	۰	—	۰
y	۰	↗	a ۲	↘	۰

چنانکه نقاط (x , y) مربوط بپارامتر t و (x' , y') مربوط بپارامتر t — π ۲ را درنظر بگیریم ازدستورهای (۲) نتیجه میشود که :

$$x' = ۲\pi a - x \qquad y' = y$$

پس از آنجا خط SD بمعادله $x = \pi a$ محور تقارن منحنی خواهد بود .

ضریب زاویه مماس در یك نقطه $\frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a \sin t}{a(۱ - \cos t)} = \cot g \frac{t}{۲}$ بوده

وازآنجا نتیجه میشود که مماس در نقاط O و $'O$ موازی y میباشد. درهر نقطه M غیر مشخص زاویه (ωA , ωM) مساوی t بوده وزاویه (BM , $B\omega$) ویا مساوی آن (MB , Oy) مساوی $\frac{t}{۲}$ خواهد بود. پس‌ازآنجا زاویه (Ox , MB) مساوی $\frac{\pi}{۲} - \frac{t}{۲}$ بوده ویا آنکه ضریب زاویه MB مساوی $tg\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{t}{۲}\right) = \cot g \frac{t}{۲}$ خواهدشد . در نتیجه MB منطبق برمماس در M میباشد . پس از آنچه گفته شد نتیجه میشود که مماس در یکنقطه M سیکلوئید از نقطه B که با A روی یك قطر دایره قرار دارند میگذرد .

تعریف ــ خمهای اونیکورسال ــ دربین خمهای جبری یك طبقه مخصوص یافت میشود که خمهای اونیکورسال نامیده شده و دارای تعریف زیر میباشند .

هر منحنی که مختصات x و y آنرا بتوان برحسب تابع منطقی ازیك پارامتر t نوشت اونیکورسال میباشد .

قضیه ـ هر منحنی اونیکورسال یك منحنی جبری است .

زیرا چنانکه پارامتر t را بین مختصات این خمها حذف کنیم رابطه جبری بین x و y خواهیم داشت .

۳ ـ رسم منحنی که معادله آن تابع ضمنی از x و y باشد .

۱۴۸ ـ شاخه های بینهایت منحنی جبری که معادله آن بصورت تابع ضمنی داده شده باشد

امتداد مجانب ـ منحنی C را جبری وازمرتبه n بمعادله: $f(x,y)=0$ (۱)
فرض کرده این تابع کامل واز درجه n بوده وآنرا برحسب قوای نزولی بصورت :

$$\varphi_n(x,y)+\varphi_{n-1}(x,y)+\cdots+\varphi_1(x,y)+\varphi_0$$

مینویسیم . φ_0 مقدار ثابت و $\varphi_k(x,y)$ مجموع جملات درجه k خواهند بود .

چنانچه نقطه M منحنی به بینهایت رود وشاخهٔ را که میپیماید دارای امتداد مجانب $O\triangle$ باشد خط OM درحد بسمت $O\triangle$ میل خواهد نمود .

α ، β راکوسینوسهای هادی OM گرفته مختصات M $x=\alpha\rho,\quad y=\beta\rho$
در معادله منحنی صدق مینمایند واز آنجا :

$$(۲)\quad \rho^n\,\varphi_n(\alpha,\beta)+\rho^{n-1}\,\varphi_{n-1}(\alpha,\beta)+\cdots+\rho\,\varphi_1(\alpha,\beta)+\varphi_0=0$$

خواهد بود . پس از تقسیم طرفین بر ρ^n وملاحظه آنکه $\frac{1}{\rho}$ بازاء M در بینهایت صفر میشود و α ، β بسمت α_1 ، β_1 کوسینوسهای هادی $O\triangle$ میل میکنند $\varphi_n(\alpha,\beta)=0$ شده و از آنجا نتیجه میشود که مختصات هر نقطه $O\triangle$ در رابطهٔ $\varphi_n(x,y)=0$ (۳) صدق میکنند .

و برعکس $\triangle$ را یکی از خطوط دسته که توسط (۳) نمایش داده شده فرض کرده α_1 ، β_1 را کوسینوسهای هادی آن میگیریم . خط δ را توسط کوسینوسهای هادیش α ، β فرض کرده مختصات نقاط برخورد δ و C بصورت $\alpha\rho$ ، $\beta\rho$ که درآن ρ یك ریشه معادله (۲) است نوشته میشوند چنانکه α و β بسمت α_1 و β_1 میل کنند $\varphi_n(\alpha,\beta)$ بسمت $\varphi_n(\alpha_1,\beta_1)$ که صفرمیباشد میل کرده ولااقل یکی ازریشه‌های معادله (۲) بینهایت میشود و از آنجا یکی از نقاط برخورد خط δ و C به بینهایت

خواهد رفت و در نتیجه ثابت میشود که Δ امتداد مجانب C میباشد . دستور زیر از آنچه که گفته شد بدست میآید .

دستور - برای بدست آوردن معادله دسته خط امتداد های مجانب خم جبری C کافی است مجموع جملات بزرگترین درجه $f(x, y)$ را مساوی صفر قرار دهیم .

همچنین باید یادآور شد که معادله (۳) ازقراردادن $T = 0$ در معادله همگن C بدست میآید .

چنانکه $\varphi_n(x, y)$ را بعوامل درجه اول تجزیه نموده و مثلا $(bx - ay)$ معادله $O\Delta$ باشد این امتداد مجانب را ساده ، مضاعف ویاازمرتبه p ام گویند برحسب آنکه $\varphi_n(x, y)$ بخش پذیر بر $(bx-ay)$ یابرقوه دوم ویاقوه p ام این جمله باشد.

و یا بزبان دیگر امتداد مجانب Δ از مرتبه p ام است چنانچه خط بینهایت خم C را در p نقطه منطبق بر نقطه بینهایت این امتداد قطع نماید .

نتیجه - اگر $\varphi_n(x, y)$ مقدار x را درفاکتور داشته باشد Oy امتداد مجانب خواهد بود. ضریب زاویه های امتدادهای مجانب ریشه های معادله $\varphi_n(1, t) = 0$ میباشند.

بررسی شاخه بینهایت مربوط بیک امتداد مجانب

۱ - امتداد مجانب ، امتداد یکی ازمحور های مختصات است .

فرض کنیم Oy امتداد مجانب باشد پس $\varphi_n(x, y)$ دارای x درفاکتور است و معادله در اینحال بصورت :

$$y^{n-p} g_0(x) + y^{n-p-1} g_1(x) + \cdots + g_{n-p}(x) = 0 \qquad (4)$$

نوشته میشود . اگر $X = a$ معادله مجانب باشد چنانکه $M(x, y)$ روی شاخه مربوطه به بینهایت رود x بسمت a میل کرده $\frac{1}{y}$ بسمت صفر وطرف اول معادله :

$$g_0(x) + \frac{1}{y} g_1(x) + \cdots + \frac{1}{y^{n-p}} g_{n-p}(x) = 0 \qquad (5)$$

بسمت $g_0(a)$ میل خواهند کرد پس از آنجا نتیجه میشود که : $g_0(a) = 0$ است .

پس آنچه که گفته شد با دستور زیر خلاصه میکنیم :

دستور - چنانکه Oy امتداد مجانب باشد معادله دسته خط مجانبهای موازی Oy ازصفر کردن ضریب بزرگترین درجه y در معادله $f(x, y) = 0$ بدست میآید .

دستور دیگر نظیر آنرا میتوان برای مجانبهای موازی Ox بیان نمود .

تبصره - a را ریشه ساده وحقیقی $g_0(x)$ فرض کرده چنانچه y بینهایت شود فقط یکی از ریشه های x معادله (۵) بسمت a میل خواهد کرد . این ریشه حتماً حقیقی بوده و از آنجا نتیجه میشود که در چنین حالت شاخه منحنی (C) مجانب بخط $X = a$ حقیقی بوده و بخصوص این وضعیت موقعیکه Oy امتداد مجانب ساده خم C باشد اتفاق میافتد .

وضعیت منحنی نسبت بمجانب - خط $X = a$ را معادله مجانب موازی Oy گرفته اگر نقطه $M(x, y)$ به بینهایت رود با قراردادن

$$x = a + x_1 \qquad y = \frac{1}{y_1} \qquad (٦)$$

مقادیر x_1 و y_1 بسمت صفر میل خواهندکرد . چنانکه درمعادله منحنی تبدیل (٦) را بنمائیم معادله حاصل $f(x_1, y_1) = 0$ شده و طرف اول آن بازاء $x_1 = 0$ و $y_1 = 0$ صفر خواهد شد . پس برای بررسی وضعیت منحنی نسبت بمجانب کافی است چنانکه یکی ازمتغیر های x_1 و یا y_1 بسمت صفر میل کند علامت متغیر دیگر راکه آن نیز بسمت صفر میل میکند تعیین نمائیم .

مرتبه نقطه واقع در بینهایت - طبق معادله (٤) هرخط موازی y ، منحنی را در $n - p$ نقطه درفاصله نزدیك وازآنجا در p نقطه واقع دربینهایت قطع مینماید پس ازآنجا نقطه بینهایت واقع درامتداد Oy برای منحنی ازمرتبه p ام خواهد بود .

۲- امتداد مجانب موازی یکی ازمحورها نمیباشد - c را یکی از ریشه های حقیقی مخالف صفر $\varphi_n(1, t)$ و $M(x, y)$ را نقطه واقع روی شاخه بینهایت C که دارای امتداد مجانبی بضریب زاویه c میباشد فرض کرده برای پیدا کردن خود مجانب حد $y - cx = \delta$ را وقتیکه x بینهایت میشود پیدا میکنیم بدین منظور در معادله $f(x, y) = 0$ بجای y مساویش $cx + \delta$ را گذارده و چون $\varphi_n(x, y)$ جمله $(y - cx)$ را در فاکتور دارد بصورت :

$\varphi_n(x, y) \equiv (y - cx)\,\psi(x, y)$ نوشته میشود . و چون بجای y مقدارش

را قرار دهیم ضریب x در $\varphi_n(x, y)$ منتها مساوی n بوده و در جملات بعدی مثلا $\varphi_{n-1}(x, y)$ توان x کمتر از n بوده و معادله حاصل :

$$x^{n-p} g_0(\delta) + x^{n-p-1} g_1(\delta) + \cdots + g_{n-p}(\delta) = 0 \qquad (۷)$$

نوشته خواهد شد چون طرفین این معادله را بر x^{n-p} بخش کرده و x را مساوی بینهایت کنیم مقادیر δ ریشه‌های $g_0(\delta)$ خواهند بود . وبرعکس اگر d ریشهٔ $g_0(\delta)$ باشد چنانکه δ بسمت d میل کند یك ریشهٔ x معادله (۷) بینهایت خواهد شد . پس دستور زیر نتیجه میشود :

دستور ـ ضریب زاویه مجانب یك خم جبری را c فرض کرده عرض از مبدء این مجانب ریشه‌های ضریب بزرگترین قوه x درمعادله حاصل ازمعادله منحنی پس از قرار دادن $y = cx + \delta$ در آن خواهد بود .

تبصره ـ چنانکه c ضریب زاویه یك امتداد مجانب ساده و حقیقی باشد $g_0(\delta)$ نیز دارای یك ریشهٔ ساده و حقیقی بوده و یك شاخه ساده و حقیقی منحنی مجانب بخط Δ خواهد بود .

وضعیت منحنی نسبت بمجانب ـ برای بررسی وضعیت منحنی نسبت بیك مجانب حقیقی بمعادله : $Y = cX + d$ باید علامت $y - cx - d$ را بررسی نمود. این مقدار وقتیکه M بینهایت رود صفر شده و چون $y - cx = \delta$ برحسب x از معادله (۷) بدست میآید میتوان تبدیلات :

$$x = \frac{1}{x_1} \qquad\qquad \delta = d + y_1$$

را در معادله نموده و بهمان ترتیب که پیش در موردیکه امتداد مجانب موازی یکی از محور ها میبود عمل نمائیم .

همچنین میتوان در موردیکه فقط یکی از ریشه های x معادله (۷) بینهایت میشود ملاحظه کرد که بازاء δ نزدیك به d این ریشه‌همان‌علامت مجموع ریشه‌هارا داشته ویا آنکه علامت $\frac{-g_1(d)}{g_0(\delta)}$ را خواهد داشت .

مرتبه نقطه واقع در بینهایت ـ معادله (۷) را میتوان معادله x های نقاط مشترك خم C وخط △ بمعادله : $y = cx + d$ دانست . چنانکه △ غیر مشخص باشد تعداد $p - n$ ازاین نقاط درفاصله نزدیك بوده ودرنتیجه مرتبه نقطه بینهایت p خواهد بود . و از آنجا مجانبهای مربوطه خطوطی خواهند بود که ضریب زاویه c داشته و منحنی C را درلااقل $p + ۱$ نقطه واقع در بینهایت قطع مینمایند .

شاخه های شلجمی شکل ـ p را مرتبه نقطه u واقع در بینهایت در امتدادی بضریب زاویه C فرض کرده عده نقاط مشترك خط بینهایت و خم C مساوی مرتبه q ریشه c معادله $\varphi_n(1, t) = ۰$ بوده و q لااقل مساوی p میباشد چنانکه q بزرگتر از p باشد منحنی دارای شاخه‌های شلجمی‌شکل درامتداد مجانب مربوطه خواهدبود .

۱۴۹ ـ طریقه رسم منحنی که معادله آن بصورت $f(x, y) = ۰$ داده شده باشد ـ برای رسم چنین منحنی باید بترتیب بررسیهای زیر را بنمائیم :

۱ـ چنانکه منحنی جبری و از درجه n و دارای نقطه مکرر از مرتبه $n - ۱$ در فاصله نزدیك باشد مبداء مختصات را بدان نقطه برده معادله حاصل بصورت :

$$\varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) = ۰$$

نوشته خواهد شد چنانکه قرار دهیم : $y = tx$ مختصات نقطهٔ از منحنی تابع منطقی از t شده و همانطورکه در رسم منحنی‌که معادله آن بصورت پارامتری باشد منحنی را رسم میکنیم .

وهمچنین است اگر منحنی دارای نقطه مکرر ازمرتبه $n - ۱$ دربینهایت باشد فرض‌کنیم‌که این نقطه در امتداد $y - cx = ۰$ واقع باشد چنانکه منحنی را با خط $y = cx + d$ قطع نمائیم $n - ۱$ نقطه برخورد در بینهایت و یك نقطه در فاصله نزدیك خواهیم داشت در نتیجه چنانکه در معادله منحنی بجای y مقدار $cx + d$ را قرار دهیم معادله درجه اولی برحسب x بصورت : $x g(d) + g_1(d) = ۰$ داشته واز آنجا مقادیر x و y بترتیب :

$$x = -\frac{g_1(d)}{g(d)} \qquad y = -c\frac{g_1(d)}{g(d)} + d$$

خواهند شد .

حال فرض کنیم منحنی ازدرجه n ودارای نقطه مکرر از مرتبه $n-2$ درفاصله نزدیك باشد . این نقطه را در مبداء مختصات فرض کرده خط $y = tx$ منحنی را در دو نقطه بغیر از مبداء قطع کرده ومختصات این نقاط از معادلات :

$$(1) \qquad x^2 \varphi_n(1, t) + x\varphi_{n-1}(1, t) + \varphi_{n-2}(1, t) = 0$$

$$(2) \qquad y = tx$$

بدست میآیند . شکل منحنی مطلوب از بحث در ریشه های معادله (۱) چنانکه t از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر نماید بدست میآید . و همچنین است اگر منحنی ازدرجه n و دارای نقطه مکرر از مرتبه $n-2$ در امتداد $y - cx = 0$ باشد چنانکه بجای y مقدار $cx + \delta$ را در معادله قرار دهیم معادله درجه دوم :

$$x^2 g(\delta) + x g_1(\delta) + g_2(\delta) = 0$$

بدست آمده وکافی است که آنرا برحسب δ بحث نمائیم

۲ ـ چنانکه با هیچیك از طریقه های بالا نتوان معادله را بصورت پارامتری نوشت معادله منحنیرا نسبت بیکی ازمختصات مثلا y مرتب کرده ودرمعادله حاصل:

$$y^p \varphi_0(x) + y^{p-1} \varphi_1(x) + y^{p-2} \varphi_2(x) + \cdots = 0$$

حقیقی بودن وعلامت مقادیر y را بازاء مقادیر x که از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر میکند بررسی مینمائیم از این بحث شکل تقریبی منحنی بدست خواهد آمد .

۳ـ شاخه‌های بینهایت منحنیرا بررسی کرده ومجانبهای مربوطه را درصورت موجود بودن مییابیم .

٤ ـ از دستورات زیر برای ساده شدن رسم منحنی هرچه ممکن باشد باید استفاده نمود :

یکم ـ چنانکه با تغییر x به $-x$ و y به $-y$ معادله منحنی تغییر ننماید منحنی نسبت بمبداء مختصات قرینه است .

این قضیه واضح و در اینحال کافی است که نصف منحنی مثلا قسمت مربوط بمقادیر مثبت x را رسم نموده و بعد منحنی را با رسم قرینه نصف اول نسبت بمبداء مختصات تکمیل نمائیم .

دوم ـ چنانکه با تغییر x به $-x$ معـادلهٔ منحنی تغییر ننماید منحنی نسبت بمحور Oy قرینه است.

زیرا بازاء دو مقدار x مساوی و مختلف العلامه دومقدار مساوی y از معادله بدست آمده و در نتیجه بازاء هر نقطه $M(x_0, y_0)$ منحنی نقطه $M'(-x_0, y_0)$ قرینه آن نسبت به Oy خواهیم داشت. در اینحال هم کافی است که قسمتی ازمنحنی را بازاء مقادیر مثبت x رسم کرده وبعد قرینه آنرا نسبت به Oy برای تکمیل منحنی رسم نمائیم.

سوم ـ چنانکه با تغییر y به $-y$ معـادلهٔ منحنی تغییر ننماید منحنی نسبت به Ox قرینه است.

اثبات این قضیه نظیر اثبات قضیه قبل میباشد.

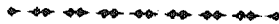
چهارم ـ چنانکه با تغییر x به y و y به x معادلهٔ منحنی تغییر ننماید منحنی نسبت به نیمساز اول قرینه است.

زیرا شرط لازم وکافی برای آنکه دونقطه (x, y) و (x', y') نسبت به نیمساز اول قرینه باشند آنستکه $x = y'$ و $y = x'$ باشد

پنجم ـ چنانکه با تغییر x به $-y$ و y به $-x$ معادلهٔ تغییر ننماید منحنی مربوطه نسبت به نیمساز دوم قرینه خواهد بود.

زیرا برای آنکه دونقطه (x, y) و (x', y') نسبت به نیمساز دوم محورها قرینه باشند بایستی $x = -y'$ و $y = -x'$ باشد.

ه ـ طریقه نواحی ـ در بعضی حالات رسم منحنی بطریقه نواحی شکل منحنی را بزودی بما خواهد داد. چنانکه بتوانیم معـادلهٔ منحنی را بصورت: $ABC\cdots = A'B'C'\cdots$ که در آن A، B، C $\cdots$ A'، B'، C' $\cdots$ کثیرالجمله هائی هستند بنویسیم منحنیات $A = 0$ ، $B = 0$ ، $\cdots$ $C' = 0$ را رسم کرده نواحی از صفحه که مختصات نقاطشان دو طرف معادله بالا را مختلف ـ

العلامه میکنند هاشور میزنیم . واضح است که هیچیك از نقاط منحنی دراین نواحی واقع نشده و فقط از نواحی که هاشور نخورده است خواهد گذشت . ازطرفی منحنی از نقاط برخورد منحنی $A = 0$ با منحنیات $A' = 0$ ، $B' = 0$ ، $C' = 0$ .... نیز میگذرد و بدین ترتیب نقاطی چند که منحنی از آن گذشته ونواحی که در آن واقع است خواهیم داشت .

بخش دوازدهم

رسم خمهای قطبی

۱۵۰ ـ کلیات ـ در صفحهٔ راستادار محور $x'x$ و مبداء O را روی آن فرض کرده گوشه قطبی نقطه M مقدار جبری گوشه θ یکی اززوایای حاصل ازامتداد $x'x$ با یکی از امتداد های راستاداریکه روی OM انتخاب پذیر است میباشد . شعاع حامل M مقدار $\overline{OM} = r$ بوده واین مقادیر r و θ را مختصات قطبی نقطه M نامند. این مقادیر وضعیت نقطه M را درصفحه کاملا معین مینمایند .

فاصله دو نقطه ـ نقاط M_1 و M_2 را بمختصات قطبی (r_1 و θ_1) و (r_2 و θ_2) فرض کرده فاصله این دو نقطه از بستگی هندسی : $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ بدست میآید :

$$\overline{M_1 M_2}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

چنانکه محور Oy را عمود مستقیم به Ox بگیریم دستگاه کارتزین حاصل را دستگاه مربوط بدستگاه قطبی نامیده و بین آنها بستگی های :

$$x = r \cos\theta \qquad y = r \sin\theta$$

برقرار میباشد .

طرز نمایش یك منحنی ـ برای نمایش یك منحنی درمختصات قطبی میتوان خواه یکی از مختصات آن مثلا r را برحسب θ بصورت تابع $r = f(\theta)$ داده و یا آنکه هردو آنها را برحسب پارامتری مثلا t بنویسیم :

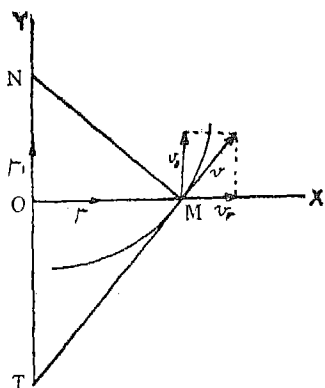
$$r = f(t) \qquad \theta = g(t)$$

۱۵۱ - خط مماس - مماس درقطب - منحنی C را بمعادله قطبی $r = f(\theta)$ (۱) فرض کرده برای آنکه این منحنی از قطب بگذرد کافی است که بازاء یك مقدار θ تابع $f(\theta)$ مساوی صفر شود.

فرض کنیم بازاء α : $f(\alpha) = 0$ بوده چنانکه θ بسمت α میل کند نقطه M بسمت O میل کرده وخط OM بسمت OT بمعادله $\theta = \alpha$ میل خواهد نمود. پس از آنجا نتیجه میشود که:

چنانکه بازاء $\theta = \alpha$ ، $r = 0$ شود منحنی از قطب گذشته و خط $\theta = \alpha$ مماس بر منحنی خواهد بود.

چنانکه معادله $f(\theta) = 0$ دارای ریشه‌های مکرر باشد این معادله نمایش دسته مماسهای شاخه های مختلفی که از O میگذرند خواهد داد.

مماس در یك نقطه غیر مشخص - معادله خم C را در دستگاه قطبی بصورت پارامتری فرض کرده نقطه M را مربوط بمقدار t پارامتر میگیریم مختصات قطبی θ و r این نقطه توابعی از پارامتر بوده و مختصات کارتزین آن:

ش ٤٤

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \sin \theta \qquad (۲)$$

خواهند بود. چنانکه دیدیم مشتق هندسی $\overrightarrow{OM}$ مماس بر C بوده وچون آنرا به $\overrightarrow{v}$ نمایش دهیم مؤلفه های آن نسبت به Ox و Oy مشتقات x' و y' میباشند. r' و θ' رامشتقات r و θ نسبت به t فرض کرده این مؤلفه ها:

$$(۳) \begin{cases} x' = r' \cos \theta + r\,\theta' \cos\left(\theta + \frac{\pi}{۲}\right) \\ y' = r' \sin \theta + r\,\theta' \sin\left(\theta + \frac{\pi}{۲}\right) \end{cases}$$

خواهند بود. پس میتوان $\overrightarrow{v}$ را مجموع هندسی دو بردار که اولی $\overrightarrow{v_r}$ وواقع روی OX

که بزاویه قطبی θ است و دیگری $\vec{v}_\theta$ و واقع روی OY که عمود مستقیم به OX میباشد فرض نمود . پس طبق بستگی های (۳) مقادیر جبری v_r و v_θ

$$v_r = r' \quad , \quad v_\theta = r\theta'$$

خواهند بود زیرا این بستگی ها را میتوان دستور های تبدیل محور های مختصات نسبت بتصاویر بردار $\vec{v}$ فرض نمود .

از آنجا نتیجه میشود که چنانکه V را اندازهٔ جبری زاویه OX با مماس MT نقطه M بگیریم : $V = (OX , MT)$ پس $tg\ V = \frac{r\theta'}{r'}$ خواهد شد . چنانکه θ را پارامتر فرض کنیم یعنی منحنی بصورت : $r = f(\theta)$ داده شده باشد $tg\ V = \frac{r}{r'}$ میباشد .

۱۵۴ ـ تحت مماس و تحت قائم قطبی ـ چنانکه OY را با زاویه قطبی $\frac{\pi}{2} + \theta$ مرور دهیم و نقاط برخورد مماس و قائم نقطه $M(\theta , r)$ را با این خط بترتیب به T و N نمایش دهیم $\overline{OT}$ را تحت مماس و $\overline{ON}$ را تحت قائم نقطهٔ M نامند . برای بدست آوردن $\overline{OT}$ کافی است معادله مماس را در دستگاه OX , OY نوشته

$$Y = (X - r)\,tg\ V \quad \text{و یا} \quad Y = \frac{r}{r'}(X - r)$$

ودر آن X را مساوی صفر کنیم . از آنجا : $\frac{1}{\overline{OT}} = \left(\frac{1}{r}\right)'$ خواهد شد .

در این فرمول متغیر زاویه θ گرفته شده است .

برای محاسبه تحت قائم بهمان ترتیب معادله قائم را نوشته و در آن $X = 0$ قرار میدهیم .

معادله قائم : $Y = -\frac{r'}{r}(X - r)$ و یا $Y = -(X - r)\cot g\ V$

واز آنجا مقدار $\overline{ON}$: $\overline{ON} = r'$ خواهد شد .

ازاین دستورها میتوان برای رسم خط مماس درنقطه M استفاده نموده بدین منظور تحت مماس ویاتحت قائم را حساب کرده ومماس درنقطه M را رسم مینمائیم .

۱۵۳ ـ معادلات خط مماس و خط قائم ـ چنانکه معادله مماس نقطه $M(\theta, r)$ را در دستگاه کارتزین OX, OY نوشته $\frac{X}{OM} + \frac{Y}{OT} = 1$ و در آن X و Y را بترتیب $\rho \cos(\omega - \theta)$ و $\rho \sin(\omega - \theta)$ قرار دهیم معادله خط مماس درنقطه M را خواهیم داشت :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \cos(\omega - \theta) + \left(\frac{1}{r}\right)'_{\theta} \sin(\omega - \theta)$$

در این معادله ρ و ω مختصات قطبی نقطه غیر مشخص از مماس میباشند .

بهمین ترتیب معادله خط قائم نقطه M در دستگاه OX, OY :

$$\frac{X}{OM} + \frac{Y}{ON} = 1$$

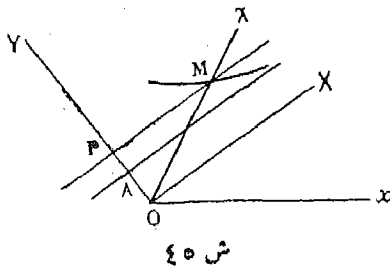
بوده و چون همانطور که گفتیم عمل کنیم معادله خط قائم :

$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} \cos(\omega - \theta) + \frac{1}{r'_{\theta}} \sin(\omega - \theta)$ خواهد شد .

۱۵٤ ـ مجانبها ـ نقاط بینهایت منحنی $r = f(\theta)$ نقاطی هستند که r بازاء مقادیری از θ بینهایت شود و نیز ممکن است که بازاء $\theta = \infty$ r بینهایت شود در اینحال امتداد مجانب وجود نداشته و منحنی بینهایت مرتبه در حول قطب دوران کرده و در هر مرتبه فاصله آن از قطب زیاد تر خواهد شد چنین منحنیات را پیچ گویند .

در حالت کلی که θ بسمت θ_0 میل نموده و r بینهایت شود خطیکه بزاویه قطبی θ_0 باشد حد OM بوده و در نتیجه امتداد مجانب خواهد بود . برای بدست آوردن مجانب بدین ترتیب عمل میکنیم :

خط OX بزاویه قطبی θ_0 را امتداد مجانب فرض کرده آنرا بزاویه $+\frac{\pi}{2}$ دوران میدهیم امتداد OY حاصل بزاویه قطبی $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$ خواهد بود . خط MP را موازی OX مرور داده بنا بتعریف حد این خط وقتیکه M به بینهایت رود مجانب

ش ٤٥

میباشد . برای تعیین حد آن حد $\overline{OP}$ راکه OA فرض کرده‌ایم حساب میکنیم . حال $\overline{OP}$ تصویر $\overrightarrow{OM}$ روی OY بوده و از آنجا :

$$\overline{OP} = \overline{OM} \cdot \cos(OM, OY) = r \cos\left(\theta_0 + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = r \sin(\theta - \theta_0)$$

در نتیجه مقدار d که تحت‌مجانب نامیده میشود حدمقدار $\delta = r \sin(\theta - \theta_0)$ وقتیکه θ بسمت θ_0 میل کند خواهد بود .

برای بدست آوردن وضعیت منحنی نسبت بمجانب کافی است که علامت $\overline{AP} = \delta - d$ را بازاء مقادیر θ نزدیك به θ_0 حساب نمائیم . بدین منظور مقدار $h = \theta - \theta_0$ قرار داده وقسمت اصلی $\delta - d$ را نسبت به h پیدا میکنیم و همچنین باید علامت مقدار r راکه بسمت بینهایت میل میکند پیدا نمائیم واینکاررا نیز بکمك قسمت اصلی آن میتوان انجام داد .

۱۵۵ ـ رسم منحنی که معادله آن در مختصات قطبی داده شده باشد ـ برای رسم منحنی که معادله آن بصورت : $r = f(\theta)$ داده شده باشد . عملیات زیر را باید بترتیب انجام داد .

۱ ـ جستجوی فاصله تغییرات θ ـ باید θ را در هر فاصله که تابع f در آن معین است تغییر داد ولی گاهی میتوان این فاصله را با استفاده از تقارن و یا متناوب بودن منحنی کوچك نمود درزیر دوحالت مختلف را بحث میکنیم :

حالت اول ـ تابع f متناوب است ـ مطالب زیررا باید بترتیب درنظر گرفت .

یکم ـ در موقعیکه f تابع منطقی از خطوط مثلثاتی θ و یا مضاربی از آن باشد میتوان بدین ترتیب فاصله لازم تغییرات‌را حساب نمود. چنانکه p کوچکترین مخرج مشترك مضارب θ باشد واضح است که با تغییر θ به $\theta + 2p\pi$ خطوط مثلثاتی θ و در نتیجه r تغییر نکرده و از آنجا نتیجه میشود که تابع $f(\theta)$ دارای دوره تناوب $2p\pi$ میباشد .

و بطورکلی چنانکه دوره تناوب عدد P باشد : $f(\theta+P)=f(\theta)$ خواهد بود .

چنانکه $P=2\pi$ و یا بطورکلی $P=2k\pi$ با فرض آنکه k عدد صحیح است باشد زوایای قطبی θ و $P+\theta$ یك نقطه بماداده و در نتیجه با تغییر θ در هر فاصله غیر مشخص که دامنه آن P باشد مثلا $(\alpha, \alpha+P)$ تمام منحنی را خواهیم داشت .

اینحالت موقعیکه f تابعی از خطوط مثلثاتی θ و یا $\frac{p}{q}\theta$ ، $\frac{p'}{q'}\theta$ ... باشد پیش میآید .

چنانکه $P=2\frac{k}{n}\pi$ بطوریکه $\frac{k}{n}$ کسر غیر ممکن التحویل باشد نقطه $M_1(\theta+P)$ از دوران بزاویه P نقطه $M(\theta)$ بدست آمده و در نتیجه منحنی از n قسمت که از دوران متوالی یکی از آنها بزاویه P در حول قطب بدست میآید تشکیل شده‌است . هریك ازاین قسمتها از تغییر θ درفاصله بدامنه P بدست میآید .

در حالیکه $P=\pi$ باشد دوران بتقارن نسبت بقطب تبدیل میشود .

چنانکه $P=2a\pi$ با فرض آنکه a اندازه ناپذیر باشد منحنی از بینهایت قسمت که ازدوران نهائی بزاویه P درحول قطب بدست میآیند تشکیل خواهد شد .

دوم ــ پس از تعیین دوره تناوب P مقدار $f\left(\theta+\frac{P}{2}\right)$ را تشکیل میدهیم چنانکه :

$$f\left(\theta+\frac{P}{2}\right)=-f(\theta) \qquad (1)$$

باشد نقطه $M'\left(\theta+\frac{P}{2}\right)$ از دوران نقطه $M(\theta)$ در حول قطب بزاویه $\pi+\frac{P}{2}$ بدست آمده و از آنجا برای رسم قوس مربوط بفاصله تغییرات P کافی است θ را در فاصله نصف آن تغییر داده و بعد دوران مربوطه را انجام دهیم .

درحالت خاصیکه $P=2\pi$ است تساوی (۱) بصورت : $f(\theta+\pi)=-f(\theta)$ درآمده دو نقطه M و M' برهم منطبق شده و برای بدست آوردن تمام منحنی کافی است θ را در فاصله π تغییر دهیم .

سوم - پس از تعیین دامنه فاصله تغییرات لازم باید بررسی نمود که آیا میتوان با استفاده از تقارن نسبت بمحوری این فاصله را کوچکتر نمود یاخیر . بدین منظور زاویه β را طوری تعیین میکنند که

$$(۲) \quad f(\beta-\theta)=f(\theta) \qquad \text{و یا} \qquad (۳) \quad f(\beta-\theta)=-f(\theta)$$

باشد و در عمل این زاویه را ۰ ، π ، ۲π ، $\frac{\pi}{۲}$ انتخاب میکنند .

چنانکه بستگی (۲) برقرار باشد نقاط $M(\theta)$ و $M'(\beta-\theta)$ نسبت بمحور OX که بزاویه قطبی $\frac{\beta}{۲}$ مفروض است قرینه بوده وچنانکه بستگی(۳) برقرار باشد نقاط M و M' نسبت به OY عمود به OX قرینه خواهند بود .

در هردوحال فاصله تغییرات را طوری انتخاب میکنیم که $\frac{\beta}{۲}$ در وسط آن واقع باشد یعنی θ را در $\left(\frac{\beta}{۲}-\frac{P}{۲}\ ,\ \frac{\beta}{۲}+\frac{P}{۲}\right)$ تغییر میدهیم . این فاصله بدو فاصله $\left(\frac{\beta}{۲}-\frac{P}{۲}\ ,\ \frac{\beta}{۲}\right)$ و $\left(\frac{\beta}{۲}\ ,\ \frac{\beta}{۲}+\frac{P}{۲}\right)$ تجزیه شده و قسمتهای منحنی مربوط باین دوفاصله نسبت بمحور مربوطه قرینه خواهند بود وازآنجا نتیجه میشود که کافی‌است که منحنی‌را بازاء مقادیر θ واقع دریکی ازاین فواصل رسم کرده و بعد توسط تقارن مربوطه تکمیل نمائیم .

حالت دوم - تابع f متناوب نمیباشد - برای رسم منحنی در اینحال باید به θ تمام مقادیررا داده ولی گاهی نیز بااستفاده ازتقارن این فاصله‌را میتوان کوچکتر نمود . فرض کنیم که بتوان عددی مثلا α پیدا نمود بطوریکه یکی از بستگی های

$$(٤) \quad f(\alpha-\theta)=f(\theta) \qquad (٥) \quad f(\alpha-\theta)=-f(\theta)$$

برقرار باشد . امتداد OX را بطوریکه : $(OX\ ,\ Ox) = \frac{\alpha}{۲}$ باشد گرفته امتداد های θ و $\alpha-\theta$ نسبت به OX قرینه خواهند بود . بافرض (٤) نقاط M و M' مربوط بزوایای قطبی θ و $\alpha-\theta$ نسبت به OX قرینه بوده و با فرض (٥) این نقاط نسبت بمحور OY عمود به OX قرینه خواهند بود درهردو حال فاصله تغییرات را میتوان کوچك نموده وبعد توسط تقارن مربوطه منحنی را تکمیل نمائیم .

۲- پس از تعیین کوچکترین فاصله، تغییرات r را برحسب θ بررسی مینمائیم.

۳- علامت r را بررسی میکنیم. این بررسی برای تعیین سوئیکه درآن هر شعاع حامل باید برده شود لازم میباشد.

٤- نقاط یادداشت شده ومماسهای آنهارا تعیین میکنیم. بخصوص نقاط بینهایت ودرصورت موجود بودن مجانبها را حساب نموده ودرصورت امکان وضعیت منحنی‌را نسبت بآنها بررسی میکنیم. مقادیر θ که بازاء آنها r بینهایت ویا صفر میشود در جدول برده شده وهمانطور هم که گفته شد مقادیریکه r را صفر میکنند زوایای قطبی مماس در مبداء میباشند.

و نیز باید یاد آور شد که در نقاطیکه r ماکزیمم ویا می نیمم است منحنی عمود برشعاع حامل میباشد زیرا r' درآنها صفر است.

٥- نقاطیکه بدین ترتیب بدست آمده‌اند توسط منحنی پیوستهٔ بهم وصل کرده وبرای اینکار از جدول تغییرات استفاده میکنیم.

٦- منحنی رسم شده را توسط تقارن ودورانها تکمیل مینمائیم.

و بالاخره چنانچه منحنی توسط معادلات پارامتری $r = f(t)$ $\theta = g(t)$ داده شده باشد کوچکترین فاصله لازم را برای t تعیین نموده وبعد تغییرات r و θ را نسبت به t بررسی مینمائیم.

بخش سیزدهم

پوش ها

۱۵۶ ـ پوش خمهای هامنی که معادله آنها بصورت تابع ضمنی داده شده باشد ـ خمهای C که بپارامتر α بستگی دارند فرض کرده بنا بتعریف پوش خمهای C خم E است که برتمام خمهای C مماس باشد. معادله خمهای C را بصورت تابع ضمنی $f(x, y, \alpha) = 0$ (۱) که بپارامتر α بستگی دارد فرض کرده M را نقطهٔ تماس C_α وپوش E میگیریم. X و Y را مختصات این نقطه فرض کرده واضح است که این مختصات توابعی از α بوده و در معادله:

$f(X, Y, \alpha) = 0$ (۲) نیز صدق میکنند زیرا نقطه M روی C_α واقع میباشد.

حال شرط آنکه خمهای E و C_α در M دارای یك مماس باشند مینویسیم پارامتر های هادی مماس بر E بترتیب $\frac{dX}{d\alpha}$ و $\frac{dY}{d\alpha}$ بوده ومعادله مماس بر C_α

$$(x - X) f'_X + (y - Y) f'_Y = 0 \qquad (۳)$$

که در آن x و y مختصات نقطهٔ از مماس اند خواهد بود. وچون این دو مماس در نقطه M مشترکند پس شرط آنکه بر هم منطبق شوند آنستکه دارای یك امتداد بوده یعنی: $f_X \frac{dX}{d\alpha} + f_Y \frac{dY}{d\alpha} = 0$ (٤) باشد پس توابع X و Y در معادلات (۲) و (٤) صدق کرده وچون معادله (٤) را نسبت به α دیفرانسیل بگیریم معادله $f_X \frac{dX}{d\alpha} + f_Y \frac{dY}{d\alpha} + f'_\alpha = 0$ (٥) بدست آمده و با در نظر گرفتن این معادله دیده میشود که برای آنکه معادله (٤) برقرار باشد لازم وکافی استکه $f_\alpha = 0$ (٦) باشد و از آنجا

نتیجه میشود که توابع X و Y از دستگاه معادلات (٢) و (٦) بدست آمده و دستور زیر را دراینحال میتوان بیان نمود :

دستور ـ مختصات نقاط تماس منحنی C_α با پوش خود از دو معادله که یکی معادله مفروض و دیگری مشتق آن نسبت به پارامتر باشد بدست آمده و چنانکه این دو معادله را نسبت به x و y حل کنیم معادلات پارامتری پوش و چون بین آنها پارامتر α را حذف کنیم معادله ضمنی پوش‌را خواهیم داشت .

تبصره ـ در حالیکه خمهای C خطوط مستقیم باشند معادلات پارامتری پوش بآسانی بدست خواهند آمد زیرا معادلات (٢) و (٦) دراینحال ازدرجه اول برحسب X و Y خواهند بود .

باید یاد آور شد که حذف پارامتر α بین معادلات (٢) و (٦) معادل بیان آنستکه معادله (٢) دارای ریشه مضاعف برحسب α باشد و از آنجا برای بدست آوردن معادله ضمنی پوش کافی است بنویسیم که معادله مفروض دارای ریشه مضاعف نسبت بپارامتر میباشد .

١٥٧ ـ نقاط حد ـ دومنحنی C نزدیك بهم مربوط بپارامترهای α و $\alpha + h$ را در نظر گرفته نقاط تقاطع آنها از حل دستگاه :

$$(٧) \quad f(x, y, \alpha) = 0 \qquad (٨) \quad f(x, y, \alpha + h) = 0$$

بدست میآیند . حال فرض کنیم α ثابت بوده و h بسمت صفر میل نماید . منحنی $C_{\alpha+h}$ بسمت C_α میل کرده و نقاط فوق بسمت نقاطی‌واقع روی C_α میل خواهند کرد . این نقاط را نقاط حد ویا نقاط مشخص این منحنی نامند .

برای تعیین این نقاط نمیتوان مستقیماً h را مساوی صفر در معادله (٨) قرار داد زیرا معادله حاصل همان (٧) شده و دستگاه حاصل غیر مشخص خواهد شد . برای رفع ابهام معادله (٨) را بصورت :

$$(٩) \quad \frac{f(x, y, \alpha + h) - f(x, y, \alpha)}{h} = 0$$

نوشته و چنانکه در این معادله h را بسمت صفر میل دهیم معادله (۹) در حد

$$f'_{\alpha}(x, y, \alpha) = 0 \qquad (۱۰)$$

خواهد شد. در نتیجه نقاط حد ازحل دستگاه (۷) و (۱۰) بدست خواهند آمد واین همان دستگاه (۲) و (٦) میباشد. پس ازآنجا دیده میشود که نقاط حد هرمنحنی C همان نقاط تماس این منحنی با پوش خود میباشند.

و نیز میتوان گفت که پوش دسته خمهائیکه بیك پارامتر بستگی دارند مکان نقاط حد خمهای مختلف آن دسته میباشد.

۱۵۸ ـ جوابهای مخصوص ـ باید یاد آور شد که بعضی نقاط حد ممکن است جزء پوشیکهٔ مطابق فوق تعریف کردیم نباشند.

چنانکه منحنی C از یك یاچند نقطه ثابت بگذرد این نقاط جزء نقاط حد بوده ولی جزء پوش نخواهند بود زیرا چنانکه P یکی از این نقاط باشد این نقطه در تقاطع C_{α} و $C_{\alpha+h}$ بوده و از آنجا جزء نقاط حد C_{α} میباشد و همچنین است وقتیکه C دارای نقاط مکرر باشد.

۱۵۹ـ پوش خمهائیکه معادله آن بصورت پارامتری داده شده باشد ـ فرض کنیم که معادلات خمهای C بصورت پارامتری:

$$x = f(t, \alpha) \qquad y = g(t, \alpha) \qquad (۱۱)$$

داده شده باشند. هر نقطه M واقع روی C_{α} مربوط بپارامتر t بوده و نقطه تماس بپارامتر t که تابعی از α میباشد مربوط خواهد بود.

چنانکه درمعادلات (۱۱)، t را برحسب α قراردهیم معادلات پارامتری پوش را داشته و پارامتر های هادی مماس بر آن:

$$\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \quad \text{و} \quad \frac{\partial g}{\partial t}\frac{dt}{d\alpha} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} \qquad (۱۲)$$

میباشند ازطرفی پارامترهای هادی مماس بر C_{α}: $\frac{\partial f}{\partial t}$ و $\frac{\partial g}{\partial t}$ (۱۳)

بوده و چون شرط انطباق این دو مماس و یا شرط متناسب بودن پارامتر های هادی آنها را بنویسیم بستگی :

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial \alpha}}{\frac{\partial g}{\partial t}}$$

و یا :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial \alpha}\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad (14)$$

بدست میآید . از این معادله t را برحسب α بدست آورده و چون مقدار آنرا در(۱۱) قرار دهیم معادلات پارامتری پوش را خواهیم داشت . میتوان همچنین α را برحسب t حساب کرده و چون آنرا در معادلات (۱۱) بگذاریم باز همان معادلات پوش را خواهیم داشت . با حذف t و α بین معادلات (۱۱) و (۱٤) معادله پوش را بصورت ضمنی بدست خواهیم آورد .

۱۹۰ ـ دولوپه منحنی ـ تعریف ـ دولوپه یک منحنی مسطحه پوش قائمهای آن منحنی میباشد .

معادله منحنی را بصورت پارامتری $x = f(t)$ $y = g(t)$ فرض کرده معادله قائم در نقطه M

$$(X - x)x' + (Y - y)y' = 0 \qquad (15)$$

میباشد . برای بدست آوردن پوش آن از طرف اول این معادله نسبت به t مشتق میگیریم معادله حاصل :

$$(X - x)x'' + (Y - y)y'' - x'^2 - y'^2 = 0 \qquad (16)$$

شده پس از حل معادلات (۱۵) و (۱٦) فرمولهای :

$$X - x = \frac{-y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} \qquad Y - y = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} \qquad (17)$$

مختصات نقطه مشخص C قائم را بما خواهند داد .

چنانکه بعداً خواهیم دید این نقطه همان مرکزخمیدگی منحنی نیز میباشد . اگرمعادله منحنی بصورت : $y = f(x)$ داده شده باشد چون x را پارامتر بگیریم :

$x' = ۱$ و $x'' = ۰$ شده در نتیجه دستور های :

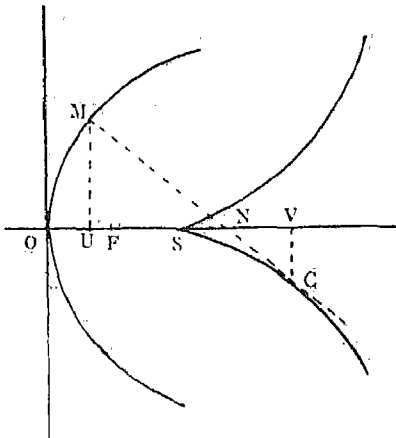
$$(۱۸) \qquad X - x = -\frac{y'(۱ + y'^{۲})}{y''} \qquad Y - y = \frac{۱ + y'^{۲}}{y''}$$

را برای مختصات نقطه تماس قائم با پوش خود خواهیم داشت .

مثال - دولوپه یك شلجمی - معادله شلجمی : $y^{۲} = ۲px$ بوده قائم در نقطه M بعرض y دارای معادله :

$$(۱) \qquad Y - y + \left(X - \frac{y^{۲}}{۲p} \right) \frac{y}{p} = ۰$$

خواهد بود . پارامتر این معادله y بوده و چون نسبت بآن مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم معادله : $-۱ + \left(X - \frac{y^{۲}}{۲p} \right) \frac{۱}{p} - \frac{y^{۲}}{p^{۲}} = ۰$

را خواهیم داشت از حل این دو معادله مختصات $X = \frac{۳y^{۲}}{۲p} + p \quad Y = -\frac{y^{۳}}{p^{۲}}$ نقطهٔ از دولوپه بدست آمده و می بینیم که $X = p + ۳x$ میباشد . از اینجا قانون ساده برای پیدا کردن نقطه مشخص خواهیم داشت زیرا : $NV = ۲ \cdot OU$ خواهد بود . از حذف پارامتر y بین این معادلات معادله کارتزین دولوپه :

$$Y^{۲} = \frac{۸}{۲۷p}(X - p)^{۳}$$

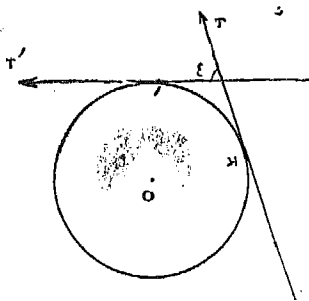
بدست آمده واز روی آن بآسانی شکل منحنی بدست خواهد آمد . این منحنی در S دارای نقطه بازگشت بطول p و نسبت به Ox قرینه و دارای شاخه های شلجمی شکل میباشد .

ش ٤٦

میتوان همچنین معادله کارتزین دولوپه را ازنوشتن شرط آنکه معادله (۱) دارای ریشه مضاعف نسبت به y باشد بدست آورد این شرط $۴p^{۳} + ۲۷q^{۲} = ۰$ میباشد .

بخش چهاردهم

خمیدگی خمهای هامنی

۱۶۱ ـ خمیدگی ـ دایرهٔ راستادار و دو نقطه M و 'M روی آن فرض کرده مماسهای MT و 'M'T این نقاط که همسوی دایره نیز راستادار شده اند در نظر میگیریم . ε را اندازهٔ زاویه برحسب رادیان بین امتداد های مثبت این مماسها گرفته میدانیم که : $\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon}{\text{قوس } MM'}$

ش ۴۷

میباشد R شعاع دایره وقوس 'MM اندازه قوس کوچکتر از نصف دایره محدود بنقاط M و 'M خواهد بود .

چنانکه بجای دایره منحنی دیگر Γ را داشته باشیم این تعریف باز قابل‌قبول بوده ودر اینحال نیز اندازهٔ ε برحسب رادیان میباشد. پس‌ازآنجا تعریف زیررا جهت‌خمیدگی متوسط میتوان نمود .

تعریف ـ خمیدگی متوسط قوس 'MM نسبت $\frac{\varepsilon}{\text{قوس } MM'}$ یعنی نسبت زاویه بین مماسهای نقاط M و 'M بقوس 'MM میباشد .

منحنی Γ راستادار و ε زاویه بین امتداد های مثبت مماسهای نقاط M و 'M و برحسب رادیان خواهند بود .

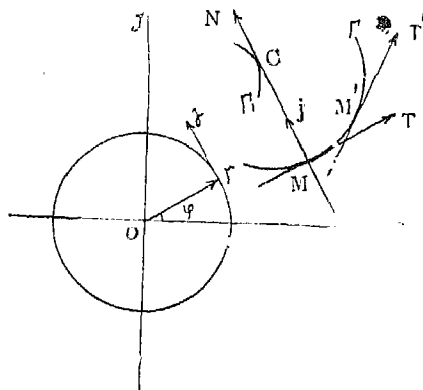
منحنی Γ را هامنی فرض‌کرده چنانکه 'M بسمت M میل کند حد نسبت فوق را بررسی مینمائیم . بدین منظور s و $s + \Delta s$ را طولهای منحنی‌الخط نقاط M و 'M

در روی منحنی راستادار Γ فرض کرده MM' قوس $= |\Delta s|$ خواهد شد . چنانکه φ و $\varphi + \Delta\varphi$ گوشه‌های نیم مماسهای مثبت نقاط M و M' بامحور Ox فرض شوند

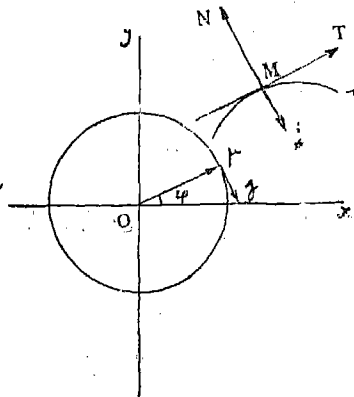
یعنی : $\varphi + \Delta\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{M'T'})$ و $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{MT})$

از آنجا $\Delta\varphi = (\overrightarrow{MT}, \overrightarrow{M'T'})$ و $\varepsilon = |\Delta\varphi|$ نتیجه میشود

پس خمیدگی متوسط قوس MM' مساوی $\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$ بوده وچنانکه M' بسمت M میل نماید حد $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ مشتق $\frac{d\varphi}{ds}$ یعنی مشتق φ نسبت به s خواهد شد . پس حد خمیدگی متوسط $\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$ بوده و این حد را بنا بتعریف خمیدگی منحنی Γ در نقطه M نامند .

ش ۴۸

$\overrightarrow{T}$ را برداریکه مماس راستادار نقطه M فرض کرده بردارهمسنگ آنراازمبداء مختصات $\overrightarrow{O\mu} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$ میگیریم چنانکه M تغییر نماید انتهای این بردار هودوگراف برداریکه $\overrightarrow{T}$ را رسم کرده و φ طول منحنی الخط نقطه μ در روی این هودوگراف که دایره است خواهد بود . و چنانکه پیش دیدیم $\frac{d\varphi}{ds}$ مساوی مشتق هندسی بردار $\overrightarrow{O\mu}$ نسبت بپارامتر s بوده واین مشتق هندسی برداری مماس بدایره نیز میباشد پس ازآنجا : $\overrightarrow{\mu j} = \frac{d\overrightarrow{O\mu}}{ds}$ برداری همسنگ بردار $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2}$ یعنی مشتق دوم $\overrightarrow{OM}$ نسبت به s خواهد بود . وازآنجا نتیجه زیررا میتوان بیان نمود:

قضیه ـ حد خمیدگی متوسط قوس MM' وقتیکه M' بسمت M میل نماید مساوی اندازهٔ بردار $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2}$ یعنی مشتق هندسی دوم بردار $\overrightarrow{OM}$ نسبت به s خواهد بود این حد خمیدگی منحنی Γ در M نامیده میشود .

تعریف - بردار همسنگ مشتق دوم $\overrightarrow{OM}$ نسبت بطول منحنی الخط s که از نقطه M رسم شده باشد بردار خمیدگی منحنی Γ در نقطه M نامیده میشود

$$\overrightarrow{MJ} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{ds^2}$$

امتداد بردارخمیدگی امتداد قائم در M میباشد زیرا این بردار همسنگ $\overrightarrow{\mu\mu}$ بوده و این بردار مماس بدایره مثلثاتی و در نتیجه عمود به مماس MT خواهد بود .

چنانکه بینندهٔ روی Γ درسوی قوسهای صعودی حرکت کند تقعر منحنی بچپ یابراست اوست برحسب آنکه زاویه قطبی φ نیم مماس

ش ۴۹

مثبت صعود نموده و یا نزول نماید . و نیز یادآور میشویم که نقاط عطف که در آنها تقعر منحنی تغییر جهت میدهد مربوط بیك ماکزیمم و یا می نیمم زاویه φ میباشند . چنانکه سوی حرکت نقطه μ را روی دایره و همچنین سوی بردار $\overrightarrow{\mu\mu}$ را که از آن نتیجه میشود بررسی نمائیم خواهیم دید که بردارخمیدگی $\overrightarrow{MJ}$ درهمان سمت قوسهای منحنی Γ نسبت بمماس واقع شده ویاآنکه گوئیم که امتداد آن بسمت تقعر منحنی Γ در M میباشد .

حال ثابت میکنیم که بردارخمیدگی بستگی بسوی مثبت انتخاب شده روی منحنی ندارد زیرا چنانکه این سو را تغییر دهیم اولا زاویه برخورد ، قوس 'MM تغییر نکرده چون دو نیم خط MT و 'M'T هردو تغییرجهت داده‌اند پس خمیدگی متوسط قوس 'MM و از آنجا حد آن هم تغییر نکرده و در نتیجه بردار جدید دارای همان اندازهٔ بردار قبل میباشد . ثانیاً امتداد بردار خمیدگی هم تغییر نخواهد کرد زیرا همان امتداد قائم برمنحنی میباشد . ثالثاً سوی آن نیز ثابت خواهد ماند زیرا این همان سوی تقعر منحنی خواهد بود .

۱۶۳ - شعاع خمیدگی - مرکز خمیدگی - چون خمیدگی دارای بعدی

عکس یك طول میباشد پس عکس آن ببعد یك طول بوده و از آنجا تعاریف زیر را میتوان نمود :

تعریف ـ شعاع خمیدگی منحنی Γ در نقطه M عکس خمیدگی در آن نقطه میباشد .

مرکز خمیدگی منحنی Γ در یکنقطه M نقطه C انتهای برداری بآغاز M بامتداد و سوی بردار خمیدگی و دارای اندازهٔ مساوی شعاع خمیدگی میباشد .

چون $MJ = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$ است پس $MC = \left|\frac{ds}{d\varphi}\right|$ خواهد بود .

درروی قائم M N سوی مثبت را سوی مربوط بزاویه قطبی $\varphi + \frac{\pi}{2}$ انتخاب کرده امتداد مثبت قائمیکه بدین ترتیب راستادار شده است عمود مستقیم به نیم مماس مثبت میباشد . امتداد مثبت مماس بدایره در نقطه μ نیز همین خواهد بود . حال $\frac{d\varphi}{ds}$ اندازهٔ جبری بردار $\frac{d\overrightarrow{O\mu}}{ds}$ روی مماس در μ بدایره بوده و از آنجا این مقدار نیز اندازه جبری بردار خمیدگی $\overrightarrow{\mu J} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2}$ خواهد بود . پس $\frac{ds}{d\varphi}$ نیز اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{MC}$ میباشد . پس بطور خلاصه میتوان گفت :

تعریف ـ خمیدگی جبری خم Γ در M اندازهٔ جبری بردار خمیدگی $\overrightarrow{MJ} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2}$ در روی قائم راستادار بوده واندازهٔ آن $\frac{d\varphi}{ds}$ میباشد .

اندازهٔ جبری شعاع خمیدگی مساوی اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{MC}$ در روی قائم راستادار بوده و اندازهٔ آن $\frac{ds}{d\varphi} = \rho$ میباشد . C مرکز خمیدگی فرض شده‌است.

مرکز خمیدگی خم Γ در M انجام بردار $\overrightarrow{MC}$ که دارای اندازهٔ جبری $\frac{ds}{d\varphi} = \rho$ در روی قائم راستادار است میباشد . امتداد مثبت این قائم بزاویه قطبی $\varphi + \frac{\pi}{2}$ بوده یعنی : $\overrightarrow{MC}_{\varphi + \frac{\pi}{2}} = \frac{ds}{d\varphi}$ خواهد بود .

چنانکه x و y مختصات نقطه M باشند مختصات X و Y مرکز خمیدگی از دستورهای :

$$(۱) \qquad X = x + \varrho \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{۲}\right) \quad , \quad Y = y + \varrho \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{۲}\right)$$

بدست میآیند .

۱۶۳ ـ قضیه ـ مرکز خمیدگی یك منحنی در نقطه M نقطه تماس قائم آن نقطه با دولوپه منحنی میباشد .

چون مختصات X و Y نقطه C مرکز خمیدگی از دستور های (۱) بدست میآیند پس پارامتر های هادی منحنی $\Gamma_۱$ مکان C دیفرانسیل هـای dX و dY یعنی مقادیر :

$$dX = dx + d\varrho \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{۲}\right) + \varrho \cos(\varphi + \pi)\, d\varphi$$

$$dY = dy + d\varrho \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{۲}\right) + \varrho \sin(\varphi + \pi)\, d\varphi$$

خواهند بود . وچنانکه در نظر بگیریم که :

$$\varrho = \frac{ds}{d\varphi} \quad , \quad dx = ds \cos\varphi \qquad dy = ds \sin\varphi$$

میباشند پس مقادیر :

$$(۲) \qquad dX = d\varrho \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{۲}\right) \qquad dY = d\varrho \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{۲}\right)$$

خواهند شد . چنانکه دیده میشود مماس بر منحنی $\Gamma_۱$ که C میپیماید دارای زاویه قطبی $\varphi + \frac{\pi}{۲}$ بوده یعنی امتداد آن امتداد قائم MC میباشد . پس $\Gamma_۱$ مکان C و دولوپه منحنی Γ میباشد .

۱۶۴ ـ طول قوس دولوپه ـ سوی مثبت روی دولوپه را طوری انتخاب میکنیم که نیم مماس مثبت نقطه C بهمان سوی نیم‌قائم مثبت MN که توسط زاویه $\varphi + \frac{\pi}{۲}$ راستادارشده‌است باشد. $s_۱$ را طول منحنی‌الخط نقطه C روی دولوپه نامیده ازمقایسه فرمولهای (۲) با $dX = ds_۱ \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{۲}\right)$, $dY = ds_۱ \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{۲}\right)$ بستگی

$$ds_۱ = d\varrho \qquad \text{و یا} \qquad s_۱ = \varrho + C^{te}$$

بدست میآید . این رابطه اندازه جبری قوس دولوپه را بما خواهد داد . مثلا :

$$\widehat{C_1 C'_1} = s'_1 - s_1 = \rho' - \rho = \overline{M' C'_1} - \overline{M C_1}$$

بوده واز آنجا قضیه زیر را میتوان بیان نمود :

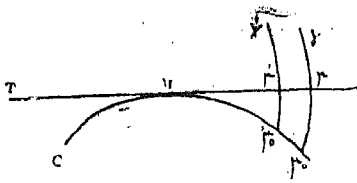
قضیه ـ اندازهٔ جبری قوس $C_1 C'_1$ دولوپه منحنی Γ مساوی نمو جبری شعاع خمیدگی منحنی اخیر میباشد .

ازاین قضیه میتوان بدون محاسبه یك انتگرال طول قوس دولوپه را حساب نمود ولی باید برای بکار بردن صحیح آن علامت قوسها و شعاعهای خمیدگی را بدقت بررسی کرد بخصوص چنانکه درروی قوس مربوطه یك نقطه بازگشت وجود داشته باشد

۱۶۵ ـ دولوپانت ـ میخواهیم تمام منحنیاتیکه منحنی مفروضی دولوپه آنها باشد پیدا نمائیم .

C را منحنی مفروض و γ را یکی از منحنیات مطلوب میگیریم . مماس در نقطه M از C قائم بر γ در نقطه μ میباشد .

چنانکه سوی مثبتی روی C انتخاب کرده و s را طول منحنی الخط M بنامیم . طبق آنچه که گفتیم $s = \overline{\mu M} + C^{te}$ بوده واندازهٔ $\overrightarrow{\mu M}$ در سوی نیم مماس مثبت M T میباشد . با انتخاب μ مبداء قوسها میتوان مقدار ثابت را حذف نموده و چنین نوشت : $\overline{M\mu} = -s$ پس یکی از منحنیات مطلوب بدین ترتیب بدست میآید که در روی هر مماس MT بردار $\overrightarrow{M\mu}$ باندازهٔ جبری $s-$ در سوی نیم مماس مثبت برده شود . نقطه μ منحنی مطلوبرا وقتیکه M منحنی مفروض را بپیماید خواهد پیمود . چنانکه مبداء قوسهارا درروی منحنی داده شده تغییر دهیم تمام منحنیات مطلوبرا خواهیم داشت .

این منحنیات که عدهٔ آنها بینهایت میباشد بهدولوپانتها موسوم بوده وباداشتن یکی از آنها میتوان تمام بقیه را بدست آورد بدین ترتیب که در روی هر قائم بر γ باید طول ثابت $l = \mu\mu'$ را نقل کرد. زیرا $\overline{M\mu'} = \overline{M\mu} + l = -s + l$ میباشد

با تغییر l تمام دولوپانت‌ها را خواهیم داشت.

دو منحنی γ و γ' حاصل را موازی نامند.

طریقه رسم دولوپانتها - انتهای نخی

که بطول l گرفته ایم بیك نقطه از منحنی C

ش ۵۰

ثابت کرده و آنرا روی این منحنی تکیه میدهیم. انتهای آزاد دیگر آن که ابتدا در μ_0 است درصفحه طوری حرکت میدهیم که نخ مزبور بمرور بازشده ولی همیشه کشیده شده باشد. درهرلحظه قسمت بازشده $M\mu$ دارای همان‌طول‌قوس $M\mu_0$ بوده وچنانکه سوی مثبت C را سوی بازشدن نخ بگیریم بستگی: $s - = \overline{M\mu} = M\mu_0$ را خواهیم داشت پس از آنجا نقطه μ دولوپانت γ را خواهد پیمود. با تغییر طول نخ تمام دولوپانتها را خواهیم داشت.

۱۶۶ - محاسبه شعاع خمیدگی و مختصات مرکز خمیدگی - مختصات نقطه M منحنی Γ را x و y و برحسب پارامتر t فرض کرده میدانیم که:

$ds = \pm\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$ میباشد. + یا - برحسب آنستکه سوی‌مثبت منحنی‌همان سوی مقادیرصعودی t ویا نزولی آن باشد. چون $tg\,\varphi = \frac{y'}{x'}$ است از دیفرانسیل گرفتن آن: $d\varphi = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2}\,dt$ بدست آمده

و در نتیجه: $\rho = \varepsilon \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}$ خواهد شد.

چنانکه سوی مثبت روی Γ با سوی t های صعودی یکی باشد $\varepsilon = +1$ خواهدبود.

چنانکه معادله‌منحنی بصورت $y = f(x)$ باشد $\rho = \varepsilon \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ خواهد شد.

C را مرکز خمیدگی گرفته مؤلفه های بردار $\overrightarrow{MC}$ بترتیب

$\rho \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ و $\rho \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ و

و یا :

$$-\rho \sin\varphi \quad و \quad \rho\cos\varphi$$

خواهند بود . با استفاده از دستور های :

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} \qquad \frac{dx}{ds} = \cos\varphi \,,\ \frac{dy}{ds} = \sin\varphi$$

این مولفه ها بصورت :

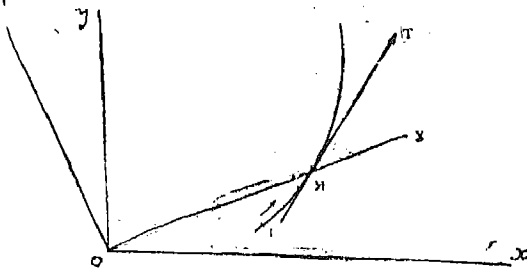
$$-\frac{dy}{d\varphi} \quad , \quad \frac{dx}{d\varphi}$$

نوشته شده و چنانکه بجای $d\varphi$ مقدارش را قرار دهیم ومختصات C را X و Y فرض کنیم مولفه های $\overrightarrow{MC}$ بصورت :

$$X - x = \frac{-y'(x'^{۲} + y'^{۲})}{x'y'' - y'x''} \qquad Y - y = \frac{x'(x'^{۲} + y'^{۲})}{x'y'' - y'x''}$$

نوشته خواهند شد .

این معادلات همان معادلاتیکه نقطه مشخص قائم‌را میدادند بوده وقضیه شماره پیش بدین ترتیب نیز ثابت میگردد .

۱۶۷- خمیدگی در مختصات قطبی- منحنی γ را راستا دار کرده MT را نیم مماس مثبت نقطه M میگیریم . φ را زاویه قطبی MT فرض کرده محور OX را بزاویه قطبی θ مرور میدهیم . V را زاویه (OX , MT) گرفته :

ش ۵۱

$$\varphi = (Ox , OX) + (OX , MT) \quad و یا \quad \varphi = \theta + V$$

و در نتیجه : $\rho = \dfrac{ds}{d\theta + dV}$ خواهد بود .

برای محاسبه این مقدار میدانیم که : $tg\,V = \dfrac{r}{r'}$ میباشد .

مؤلفه های شعاع خمیدگی $\overrightarrow{MC}$ نسبت به OX و OY بترتیب :

$$\rho \sin\left(V + \frac{\pi}{۲}\right) \ و \ \rho\cos\left(V + \frac{\pi}{۲}\right)$$

و یا $\rho \sin V$ — و $\rho \cos V$ بوده و چنانکه در نظر بگیریم که :
$\rho = \frac{ds}{d\varphi}$ و $\cos V = \frac{dr}{ds}$ و $\sin V = \frac{r d\theta}{ds}$ میباشند این مؤلفه ها
بصورت : $r \frac{d\theta}{d\varphi}$ — و $\frac{dr}{d\varphi}$ نوشته میشوند . از این فرمولها مختصات C
را در دستگاه XOY بدست آورده و بعد از آن در دستگاه $x \, o \, y$ حساب میکنیم .

۱۶۸ ـ دایره خمیدگی ـ تعریف ـ دایره خمیدگی در نقطه O واقع روی γ دایره ایست که از O گذشته و مرکز آن مرکز خمیدگی باشد .

این دایره بدایره بوسان بمناسبت خواص زیر نیز موسوم میباشد .

قضیه ـ حد دایرهٔ که در نقطه O مماس بر γ بوده و از نقطه P نزدیك به O بگذرد وقتیکه این نقطه بسمت O میل کند دایره خمیدگی خواهد بود .

O را مرکز مختصات ومماس در آنرا محور $x'x$ گرفته دایرهٔ که در این نقطه مماس به γ باشد بمعادله : $X^2 + Y^2 - 2rY = 0$ (۱) میباشد . r را طوری تعیین میکنیم که این دایره از نقطه $P(x, y)$ نیز بگذرد از آنجا :
$r = \frac{x^2}{2y} + \frac{y}{2}$ خواهد شد . حال وقتیکه P بسمت o میل کند y بسمت صفر میل کرده وحد $\frac{x^2}{2y}$ طول ρ_0 مرکزخمیدگی‌میشود . زیرا بامفروضات فوق $\rho_0 = \frac{1}{y''_0}$ بوده وچون معادله منحنی $y = f(x)$ را بسط دهیم :

$$y = \frac{x^2}{2} f''(0) + \varepsilon x^2$$

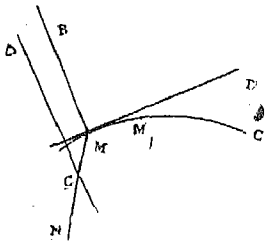
شده ودرنتیجه حد $\frac{2y}{x^2}$ وقتیکه x بسمت صفرمیل کند y''_0 خواهدشد واز آنجا ρ_0 حد $\frac{x^2}{2y}$ میباشد .

بخش پانزدهم

خمیدگی خمهای چپ

۱۶۹ـ اندیکاتریس مماسها ـ خمیدگی ـ تعریف خمیدگی درمورد خمهای چپ یا فضائی نظیر تعریف خمیدگی در باره خمهای هامنی میباشد .

منحنی فضائی (C) وقوس MM' آنرا فرض کرده مماسهای نقاط M و M' تشکیل زاویه ε که زاویه تماس نامیده میشود داده و نسبت $\frac{\varepsilon}{\text{قوس } MM'}$ خمیدگی متوسط این قوس نامیده میشود . حد این نسبت وقتیکه M' بسمت M میل نماید خمیدگی در نقطه M نیز نامیده میشود .

جهت تعریف خمیدگی جبری درمورد خمهای چپ منحنی را راستادار نموده s را طول منحنی‌الخط نقطه M و MT را نیم مماس مثبت این نقطه میگیریم . از نقطه O نیم خط $O\mu$ را موازی MT وهمسوی آن مرور داده نقطه برخورد آنرا باکره بمرکز O و بشعاع یك ، نقطه μ فرض میکنیم . چنانکه M منحنی (C) را بپیماید μ منحنی کروی (γ) را که اندیکاتریس مماسها نامیده می شود خواهد پیمود . این اندیکاتریس را نیز درسوی غیرمشخصی راستادارنموده σ را طول منحنی‌الخط نقطه μ میگیریم .

بنابتعریف خمیدگی جبری منحنی (C) در نقطه M مقدار :

$$\frac{1}{R} = \frac{d\sigma}{ds} \qquad (1)$$

بوده و نیز مقدار :

$$R = \frac{ds}{d\sigma}$$

شعاع خمیدگی جبری نامیده میشود . حال ثابت میکنیم که قدر مطلق این خمیدگی جبری همان خمیدگی که

ش ۵۲

در بالا تعریف کردیم میباشد . بدینمنظور نقطه M_1 را بینهایت نزدیك به M در روی (C) انتخاب کرده طول منحنی الخط آنرا $s + \Delta s$ میگیریم . نقطه مربوطه بآن در روی اندیکاتریس m_1 بوده این نقطه نیز بینهایت نزدیك به m و دارای طول منحنی الخط $\sigma + \Delta \sigma$ خواهد بود پس ازآنجا زاویه تماس ε مربوط بقوس $M M_1$ مساوی زاویه $m O m_1$ و یا مساوی طول قوس دایره عظیمه کره بین m و m_1 میباشد . حال این زاویه یك بینهایت کوچکی معادل قوس $m m_1$ اندیکاتریس یعنی $|\Delta \sigma|$ بوده و از آنجا نسبت $\frac{\varepsilon}{\text{قوس } M M_1}$ دارای همان حد $\left|\frac{\Delta \sigma}{\Delta s}\right|$ خواهد بود . و این حد مساوی $\left|\frac{1}{R}\right| = \left|\frac{d\sigma}{ds}\right|$ نیز میباشد .

تبصره - چنانکه منحنی (C) هامنی باشد اندیکاتریس (γ) دایره بوده طول منحنی الخط σ همان زاویه قطبی θ نیم مماس $M T$ خواهد بود . وازآنجا تعریف فوق بهمان تعریف خمیدگی در مورد خمهای هامنی تبدیل میشود .

۱۷۰ - قائم اصلی - مرکز خمیدگی - چنانکه نیم‌مماس مثبت Om منحنی (γ) را رسم کنیم این مماس واقع درصفحه مماس در m بر کره (Σ) خواهد بود . پس امتداد آن عمود به Om ودر نتیجه عمود به $M T$ میباشد .

چنانکه از نقطه M خط $M N$ را موازی آن مرور دهیم این خط یکی ازعمود های منحنی (C) بوده و آنرا قائم اصلی مینامند . سوی مثبت روی قائم اصلی همان سوی مثبت امتداد θm خواهد بود .

حال دیده میشود که صفحه $N M T$ صفحه بوسان نقطه M میباشد زیرا این صفحه موازی صفحه $\theta m m_1$ بوده و صفحه اخیر را میتوان حد صفحه $O m m_1$ وقتیکه m_1 بسمت m میل نماید دانست . وچون $O m_1$ موازی مماس بر (C) درنقطه M_1 است پس از آنجا بنا برتعریف صفحه بوسان نتیجه فوق بدست میآید (شماره ۱۳۸)

و نیز میتوان گفت که قائم اصلی که بدین ترتیب تعریف میشود قائم واقع در صفحه بوسان میباشد .

مرکز خمیدگی منحنی (C) در نقطه M نقطه C بوده و بدین ترتیب بدست میآیدکه در روی قائم اصلی MN طول MC را بطوریکه $\overline{MC} = R$ (۲) باشد نقل میکنیم .

دایره بمرکز C و بشعاع R واقع در صفحه بوسان دایره خمیدگی نامیده میشود . محور این دایره یعنی خطیکه از نقطه C عمود بصفحه بوسان باشد محور خمیدگی ویا خط قطبی نامیده میشود .

عمود MB بصفحه بوسان که از M رسم شده باشد به بی نرمال موسوم است . سوی مثبت آنرا طوری انتخاب میکنند که سه وجهی MTNB همسوی سه وجهی مقایسه باشد . این سه وجهی ، سه وجهی Frenet و یا سه وجهی اصلی نقطه M نامیده میشود .

چنانکه نیم خط $O\mu''$ را موازی MB و همسوی آن مرور دهیم کره Σ را در نقطه μ'' قطع کرده چنانکه M منحنی C را بپیماید μ'' یك‌منحنی (γ'') راکه‌اندیکاتریس بی نرمال نامیده میشود خواهد پیمود .

حال ثابت میکنیم که مماس $\mu''O'$ موازی $O\mu''$ میباشد . بدین منظور بترتیب (a, b, c) و (a', b', c') و (a'', b'', c'') راکوسینوسهای هادی MT و MN و MB میگیریم . این نه‌کوسینوس هادی توسط بستگی هائی‌که درمورد تغییر محور هـای مختصات در فضا ذکر کردیم بهم مربوطند . مختصات نقطه μ'' بترتیب a'' ، b'' ، c'' بوده وازآنجا پارامتر های هادی $\mu''O'$ بترتیب da'' ، db'' و dc'' خواهند بود . پس کافی است ثابت‌کنیم‌که $\mu''O'$ عمود به MT و MB بوده یعنی :

$$a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'' = 0 \qquad (۳)$$

$$a''da'' + b''db'' + c''dc'' = 0 \qquad (٤)$$

میباشند . حال معادله (٤) از فاضله گرفتن بستگی : $a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$ بدست آمده و معادله (۳) از فاضله‌گرفتن بستگی $aa'' + bb'' + cc'' = 0$ یعنی از $(a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'') + (a''da + b''db + c''dc) = 0$

بدست میآید . چون پرانتز دوم صفر میباشد زیرا MB عمود به $\mu\theta$ است پس از آنجا پرانتز اول نیز صفر خواهد بود .

حال $\mu'\theta'$ را همسوی $\theta\mu$ راستادار کرده و سوی مثبت روی (γ') را طوری انتخاب میکنیم که نیم مماس مثبت نقطه μ' آن $\mu'\theta'$ باشد . σ' را طول منحنی الخط μ' فرض کرده مقدار $\frac{1}{T} = \frac{d\sigma'}{ds}$ (۵) را تاب منحنی (C) درنقطه M نامند .

عکس این مقدار یعنی $T = \frac{ds}{d\sigma'}$ شعاع خمیدگی خوانده میشود .

تعریف تاب منحنی نظیر تعریف خمیدگی آن میباشد . چنانکه نقطه M_1 را روی (C) گرفته و نقطه μ'_1 مربوط بآنرا روی (γ') در نظر بگیریم قوس $\mu'\mu'_1 = \Delta\sigma'$ یك بینهایت کوچك معادل زاویه $\varepsilon' = (O\mu', O\mu'_1)$ میباشد .

حال این زاویه همان زاویه بین صفحات بوسان نقاط M و M_1 بوده و در نتیجه میتوان گفت که تاب منحنی در نقطه M حد نسبت $\frac{\varepsilon'}{\text{قوس } MM_1}$ وقتیکه M_1 بسمت M میل کند خواهد بود .

۱۷۱ ـ دستور های فرنه ـ در اینجا مشتقات نه کوسینوسهای هادی که در شماره پیش یاد آور شدیم نسبت به s حساب میکنیم .

چون مختصات نقطه μ بترتیب a ، b ، c هستند پس کوسینوسهای هادی $\mu\theta\mu$ بترتیب : $c' = \frac{dc}{d\sigma}$ $\quad b' = \frac{db}{d\sigma}$ $\quad a' = \frac{da}{d\sigma}$ خواهند شد .

وچون میتوان نوشت : $\frac{da}{d\sigma} = \frac{da}{ds}\cdot\frac{ds}{d\sigma} = \frac{da}{ds}\cdot R$

از آنجا : $\frac{dc}{ds} = \frac{c'}{R}$ ، $\frac{db}{ds} = \frac{b'}{R}$ ، $\frac{da}{ds} = \frac{a'}{R}$ (۶)

میباشند . چون همین محاسبه را نسبت بنقطه $\mu'(a'', b'', c'')$ تکرار کنیم

$$a' = \frac{da''}{d\sigma'} = \frac{da''}{ds}\cdot\frac{ds}{d\sigma'} = \frac{da''}{ds}\cdot T$$

شده و از آنجا : $\frac{dc''}{ds} = \frac{c'}{T}$ ، $\frac{db''}{ds} = \frac{b'}{T}$ ، $\frac{da''}{ds} = \frac{a'}{T}$ (۷)

خواهند شد. برای محاسبه $\frac{da'}{ds}$ از بستگی $a^{2} + a'^{2} + a''^{2} = 1$ مشتق میگیریم. بستگی حاصل

$$a \frac{da}{ds} + a' \frac{da'}{ds} + a'' \frac{da''}{ds} = 0$$

شده وچون روابط (٦) و (٧) را در نظر بگیریم این بستگی بصورت:

$$\frac{a a'}{R} + a' \frac{da'}{ds} + \frac{a'' a'}{T} = 0$$

نوشته شده و پس از بخش بر a' دستور های:

$$\frac{da'}{ds} = -\frac{a}{R} - \frac{a''}{T}, \quad \frac{db'}{ds} = -\frac{b}{R} - \frac{b''}{T}, \quad \frac{dc'}{ds} = -\frac{c}{R} - \frac{c''}{T} \qquad (8)$$

را خواهیم داشت. دستور های (٦) و (٧) و (٨) بدستور های فرنه موسوم بوده. وچنانکه نه کوسینوس را داشته باشیم میتوان بوسیله آنها R و T را حساب نمود.

۱۷۴ - محاسبه شعاع خمیدگی - برای محاسبه R دستور های (٦) را مجذور کرده و جمع میکنیم بستگی حاصل:

$$\frac{1}{R^{2}} = \left(\frac{da}{ds}\right)^{2} + \left(\frac{db}{ds}\right)^{2} + \left(\frac{dc}{ds}\right)^{2} \qquad (9)$$

مقدار R را بما خواهدداد. چنانکه x و y و z را مختصات نقطه M بگیریم. میدانیم که: $a = \frac{dx}{ds}$ و $b = \frac{dy}{ds}$ و $c = \frac{dz}{ds}$ بوده واز آنجا فرمول (٩) را میتوان بصورت: $\frac{1}{R^{2}} = \left(\frac{d^{2}x}{ds^{2}}\right)^{2} + \left(\frac{d^{2}y}{ds^{2}}\right)^{2} + \left(\frac{d^{2}z}{ds^{2}}\right)^{2}$ (۱۰) نیز نوشت.

بخش شانزدهم

مخروطات

۱۷۴ ـ مجموع نقاط حقیقی یا موهومی صفحه که مختصاتشان نسبت بدو محور واقع درهمان صفحه در معادله درجه دوم :

$$f(x, y) \equiv A x^{۲} + ۲ B x y + C y^{۲} + ۲ D x + ۲ E y + F = ۰ \qquad (۱)$$

صدق کنند منحنیات درجه دوم یا مخروطات نامیده میشوند . ضرایب این کثیرالجمله ممکن است حقیقی یا موهومی باشند ولی ما تمام آنها را اعداد حقیقی فرض نموده و نیز مجموع جملات درجه دوم آن یعنی $A x^{۲} + ۲ B x y + C y^{۲}$ را به $\varphi(x, y)$ نمایش میدهیم . چنانکه این کثیرالجمله را بصورت همگن بنویسیم کثیرالجمله :

$$F(x, y, z) \equiv A x^{۲} + ۲ B x y + C y^{۲} + ۲ D x z + ۲ E y z + F z^{۲}$$

بدست آمده و نصف مشتقات جزئی آن بترتیب :

$$\frac{۱}{۲} F'_x(x, y, z) \equiv A x + B y + D z \qquad (۲)$$

$$\frac{۱}{۲} F'_y(x, y, z) \equiv B x + C y + E z$$

$$\frac{۱}{۲} F'_z(x, y, z) \equiv D x + E y + F z$$

خواهد بود . دترمینان $\triangle = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ ضرایب x و y و z مقادیر

فوق مبین کثیر الجمله $f(x, y)$ و یا $F(x, y, z)$ نامیده شده و ها ضرایب

A ، B ، C ، D ، E ، F را در بسط Δ بترتیب :

$$a = CF - E^{2} \quad c = AF - D^{2} \quad f = AC - B^{2}$$
$$b = DE - BF \quad d = BE - CD \quad e = BD - AE$$

مینامیم .

۱۷۴ ـ رده بندی منحنیات درجه دوم ـ نقاط بینهـایت منحنی درجه دوم که توسط معادله (۱) نمایش داده شده همان نقاط بینهایت امتداد های خطوطیکه بمعادله :

$$\varphi(x, y) \equiv A x^{2} + 2 B x y + C y^{2} = 0 \qquad (۳)$$

میباشند بوده این خطوط ممکن است حقیقی، موهومی مجزا ویامنطبق برهم باشند .

اولا چنانکه $AC - B^{2} > 0$ باشد معادله (۳) نمایش دوخط موهومی را داده گویند معادله (۱) یك منحنی از نوع بیضی را نمایش میدهد .

ثانیاً چنانکه $AC - B^{2} < 0$ باشد معادله (۳) دو خط حقیقی ومجزا را نمایش داده گویند منحنی از نوع هذلولی میباشد .

ثالثاً چنانکه $AC - B^{2} = 0$ باشد معادله (۳) دو خط منطبق برهم را نمایش داده گویند منحنی از نوع شلجمی است .

و بطور خلاصه گویند یك منحنی درجه دوم از نوع بیضی ، هذلولی ویاشلجمی است برحسب آنکه خط بینهایت را در دو نقطه موهومی ، حقیقی و یا منطبق برهم قطع نماید .

باید یاد آور شدکه شرط $AC - B^{2} = 0$ لازم و کافی است برای آنکه کثیرالجمله $\varphi(x, y)$ مجذور کامل یك کثیرالجمله درجه اول $lx + my$ باشد وازآنجا نتیجه میشود که معادله عمومی خم های نوع شلجمی را میتوان بصورت :

$$(lx + my)^{2} + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

نوشت . نقاط بینهایت این منحنی منطبق برنقطه بینهایت واقع درامتداد $(m, -l)$ میباشند .

مرکز یك مخروطی

۱۷۵ ـ تعریف ـ نقطه Ω را مرکز تقارن و یابطورخلاصه مرکز یك‌منحنی Γ نامند چنانکه نقاط این منحنی دوبدو نسبت بدین نقطه قرینه باشند.

برای آنکه نقطه Ω مرکز منحنی Γ باشد لازم و کافی است که نقاط برخورد هرخطیکه از این نقطه مرورکرده باشد با منحنی نسبت باین نقطه قرینه باشند.

شرط آنکه مبداء مختصات مرکز یك مخروطی باشد. منحنی مخروطی Γ را بمعادله (۱) فرض کرده مختصات یك نقطه غیرمشخص ازخط L که ازمبداء گذشته باشد چنانکه α و β را پارامترهای هادی این خط بگیریم بصورت $\alpha\rho$ و $\beta\rho$ خواهند بود. مقادیر ρ مربوط بنقاط مشترك منحنی واین خط ریشه‌های معادله :

$$(٤) \qquad \rho^2 (A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2) + 2\rho (D\alpha + E\beta) + F = 0$$

بوده برای آنکه مبداء مرکز منحنی باشد بایستی که معادله (٤) دارای دوریشه مخالف هم باشد وازآنجا لازم میآیدکه : $D\alpha + E\beta = 0$ باشد. چنانکه D و E هردو صفر نباشند فقط خط $Dx + Ey = 0$ منحنی را در دو نقطه قرینه نسبت بمبداء قطع کرده و از آنجا لازم میآید که برای آنکه مبداء مختصات مرکز منحنی باشد بایستی که ضرایب D و E هردو صفر باشند. پس از آنجا قضیه زیر را میتوان بیان نمود :

قضیه ۱ ـ برای آنکه مبداء مختصات مرکز یك منحنی درجه دوم باشد لازم و کافی است که معادله آن دارای عوامل درجه اول نباشد.

شرط آنکه یك نقطه مرکز مخروطی مفروض باشد. ـ (x_0 , y_0) را مختصات Ω فرض کرده چنانکه محور های مختصات را بموازات خود باین نقطه منتقل نمائیم معادله خم Γ در دستگاه جدید : $f (x_0 + X , y_0 + Y) = 0$ شده وچنانکه این معادله را برحسب دستور تیلور بسط دهیم معادله :

$$f (x_0 , y_0) + X f'_x (x_0 , y_0) + Y f'_y (x_0 , y_0) + \varphi (X , Y) = 0$$

بدست آمده و برای آنکه مبداء جدید مرکز منحنی باشد لازم و کافی است که

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{و} \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$$

باشند واز آنجا قضیه زیر نتیجه میشود :

قضیه ۳ ـ برای آنکه نقطه Ω مرکز منحنی درجه‌دوم $f(x, y) = 0$ باشد لازم و کافی است که مختصات آن ریشه های معادلات : $f'_y(x, y) = 0$ و $f'_x(x, y) = 0$ باشند .

بحث در معادلات مرکز ـ مختصات مرکز از حل دستگاه

$$(٥) \qquad \frac{1}{2} f'_x \equiv Ax + By + D = 0$$

$$\frac{1}{2} f'_y \equiv Bx + Cy + E = 0$$

بدست آمده واین معادلات را معادلات مرکز نامند هر کدام از آنها یك‌خط درصفحه را نمایش داده و این خطوط را خطوط مرکز نیز نامند .

۱ ـ چنانکه $f = AC - B^2$ مخالف صفر باشد دستگـاه (٥) دارای یك ریشه بوده وخطوط مرکز متقاطع میباشند دراینحال منحنی C دارای یك‌مرکز بفاصله نزدیك بوده و مختصات آن : $x_0 = \frac{d}{f}$ و $y_0 = \frac{e}{f}$ خواهند بود .

۲ ـ چنانکه $f = 0$ باشد دستگاه (٥) غیر ممکن و یا غیر مشخص میباشد .

حالت اول ـ دستگاه (٥) غیرممکن است هرگاه خطوط مرکز موازی بوده ویاآنکه طرف اول یکی ازاین معادلات مقدار ثابتی باشد دراینحال منحنی C دارای مرکز نخواهد بود .

حالت دوم ـ دستگـاه (٥) غیر مشخص میباشد هرگاه خطوط مرکز برهم منطبق بوده و یا آنکه یکی از معادلات (٥) بصورت یك اتحاد در آید . در اینحال تمام نقاط یك خط $\triangle$ مراکز منحنی خواهند بود و چنانکه M نقطه از Γ باشد M' قرینه این نقطه نسبت بنقطه از $\triangle$ روی Γ واقع خواهد بود و نیز قرینه‌های M' نسبت بتمام نقاط $\triangle$ روی منحنی واقع میباشند . حال قرینه های M' نسبت بتمام نقاط $\triangle$

نقاط مختلف خط D که از M موازی $\triangle$ رسم شده است میباشند .

پس از آنجا نتیجه میشود که هرگاه یك منحنی درجه دوم دارای یك خط مراکز باشد خطیکه از یك نقطه M منحنی موازی آن رسم شود تماماً جزء منحنی بوده ودر نتیجه این منحنی بدو خط D و 'D موازی و قرینه خط مراکز تجزیه شده و بطور استثناء ممکن است D و 'D برخط مراکز نیز منطبق باشند .

۱۷۶ ـ رده بندی دیگر خمهای درجه دوم ـ رده اول خمهائی هستندکه دارای یك مرکز درفاصله نزدیك میباشند . این خمها ازنوع بیضی یا هذلولی اند .

رده دوم خمهائی هستندکه دارای مرکز نمیباشند .

رده سوم خمهائی هستند که دارای یك خط مراکز میباشند این دسته فقط شامل دو خط موازی جدا ویا منطبق برهم میباشد .

مجموع خمهای دسته دوم وسوم خمهای نوع شلجمی میباشند.

حال بررسی اینکه درچه صورت معادله نوع شلجمی

$$(lx + my)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (6)$$

نمایش یك منحنی ازدسته دوم را خواهد داد مینمائیم . بدینمنظور معادلات خطوط مرکز :

$$l(lx + my) + D = 0$$

$$m(lx + my) + E = 0$$

را نوشته بجای یکی از معادلات معادله $Dm - El = 0$ را میگیریم این معادله از جمع دو معادله بالا پس از ضرب اولی در m و دومی در $-l$ بدست آمده وازآنجا نتیجه میشود که هرگاه $Dm - El \neq 0$ باشد دستگاه معادلات مرکز غیر ممکن وچنانکه این مقدار صفر باشد غیر مشخص خواهد بود . پس بطور خلاصه هرگاه معادلات:

$$lx + my = 0 \qquad 2Dx + 2Ey + F = 0$$

نمایش دو خط متقاطع را بدهند معادله (۶) نمایش یك منحنی از رده دوم را داده و چنانکه این خطوط دارای یك امتداد باشند نمایش یك منحنی ازرده سوم را خواهد داد .

با فرض اخیر ضرایب D و E متناسب l و m بوده واز آنجا میتوان چنین نوشت :

$$Dx + Ey \equiv k(lx + my)$$

پس معادلهٔ یك منحنی از رده سوم را میتوان بصورت

$$(lx + my)^2 + 2k(lx + my) + F = 0$$

نوشت .

۱۷۷ - انتقال محورها بطوریکه مبداء مختصات بر مرکز منحنی منطبق گردد - نقطه $\Omega(x_0, y_0)$ را مرکز منحنی مخروطی ازرده اول یاسوم فرض کرده ΩX و ΩY را محورهای حاصل ازمحورهای اول توسط یك انتقال میگیریم . چنانکه پیشتر محاسبه کردیم معادله Γ در دستگاه جدید :

$$\varphi(X, Y) + Xf'_x(x_0, y_0) + Yf'_y(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) = 0$$

بوده وچنانکه ملاحظه کنیم که : $f'_x(x_0, y_0) = 0$ و $f'_y(x_0, y_0) = 0$

میباشند این معادله بصورت $\varphi(X, Y) + f(x_0, y_0) = 0$

نوشته خواهد شد . در این معادله عوامل درجه دوم همان عوامل معادله داده شده میباشند . برای محاسبه $f(x_0, y_0)$ از بستگی اولر در مورد کثیرالجمله های همگن استفاده میکنیم :

$$2f(x, y) \equiv xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) + f'_z(x, y)$$

برای محاسبه $f'_z(x, y)$ باید اول $f(x, y)$ را همگن نموده و بعد در مشتق آن نسبت به z بجای z یك را قرار دهیم پس از آنجا :

$$f'_z(x, y) \equiv 2Dx + 2Ey + 2F$$

بوده و چون در بستگی بالا بجای x و y مقادیر x_0 و y_0 را قرار دهیم :

$$f(x_0, y_0) = Dx_0 + Ey_0 + F$$

خواهد شد .

در حالتیکه مخروطی از رده اول باشد : $y_0 = \frac{e}{f}$ و $x_0 = \frac{d}{f}$ بوده

واز آنجا : $f(x_0, y_0) = \frac{Dd + Ee + Ff}{f}$ میباشد . چنانکه دیده میشود صورت این کسر بسط دترمینان $\triangle$ نسبت بعوامل خط آخر بوده و در نتیجه معادله منحنی پس از انتقال مبداء مختصات بمرکز آن :

$$\varphi(X, Y) + \frac{\triangle}{f} = 0 \qquad (7)$$

خواهد شد .

۱۷۸ ـ شرط آنکه یك منحنی درجه دوم بدوخط تجزیه شود ـ قضیه ـ برای آنکه معادله $f(x, y) = 0$ نمایش یك‌منحنی تجزیه شده را بدهد لازم وکافی است که مبین آن صفر باشد .

این شرط لازم میباشد ـ فرض کنیم که $f = 0$ نمایش دو خط را بدهد در حالتیکه این دو خط متقاطع باشند تشکیل یك منحنی درجه دوم را که دارای یك مرکز است میدهند چنانکه محور های مختصات را باین نقطه انتقال دهیم معادله بصورت (۷) در آمده وچون مرکز روی منحنی واقع است $\triangle = 0$ خواهد بود .

در حالتیکه خطوطیکه منحنی بآنها تجزیه میشود موازی یا منطبق بر هم باشند معادلات مرکز دارای ضرایب متناسب بوده و دترمینان $\triangle$ در اینحال هم صفر خواهد شد .

این شرط کافی است زیرا چنانکه $\triangle = 0$ باشد اگر منحنی از نوع بیضی یا هذلولی است معادله آن نسبت بمحور هائیکه از مرکز میگذرند بصورت : $\varphi(X, Y) = 0$ بوده ونمایش دو خط متقاطع را خواهد داد .

وچنانکه منحنی ازنوع شلجمی باشد $f(x, y)$ را میتوان بصورت کثیرالجمله :

$$(lx + my)^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

نوشت مبین این کثیرالجمله :

$$\begin{vmatrix} l^2 & lm & D \\ lm & m^2 & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

بوده وچنانکه آنرا بسط دهیم:

$$\triangle = -D^2m^2 - E^2l^2 + 2DElm \quad \text{ویا :} \quad \triangle = -(Dm - El)^2$$

خواهد شد .

حال بنا بفرض $Dm - El = 0$ است دراینحال چنانکه دیدیم منحنی دارای یك خط مراکز بوده واز دو خط موازی ویا منطبق برهم تشکیل میشود .

ساده کردن معادله درجه دوم

۱۷۹ ـ میخواهیم ثابت کنیم که همواره ممکن است دو محور قائم مختصات

انتخاب نمود بطوریکه معادله هر منحنی تجزیه نشده درجه دوم بصورت یکی از معادلات زیر :

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1=0 \quad \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+1=0 \quad \frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-1=0 \quad Y^2=2pX$$

در آمده و از آنجا نتیجه بگیریم که هر منحنی درجه دوم تجزیه نشده یك بیضی ، هذلولی و یا شلجمی میباشد .

در صفحه دو محور قائم مختصات فرض کرده و معادله درجه دوم را نسبت باین دستگاه بصورت :

$$f(x,y)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

میگیریم . برحسب ردهایکه منحنی بآن تعلق دارد چند حالت تشخیص میدهیم :

حالت اول - منحنی از رده اول میباشد - چنانکه معادله منحنی را پس از انتقال محور ها بمرکز آن بنویسیم معادله جدید :

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+\frac{\Delta}{f}=0$$

خواهد شد . حال محور های مختصات را در حول مرکز بزاویه α دوران میدهیم . محور های جدید را ΩX و ΩY گرفته و زاویه α را طوری انتخاب میکنیم که در معادله حاصل ضریب XY صفر شود . دستور های تغییر مختصات :

$$x=X\cos\alpha-Y\sin\alpha \qquad y=X\sin\alpha+Y\cos\alpha$$

بوده پس معادله منحنی در دستگاه جدید :

$$A_1X^2+2B_1XY+C_1Y^2+\frac{\Delta}{f}=0$$

نوشته خواهد شد . مقادیر A_1 و B_1 و C_1 بترتیب مساوی :

$$A_1=A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha$$

$$B_1=-A\sin\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+C\cos\alpha\sin\alpha$$

$$C_1=A\sin^2\alpha-2B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha$$

میباشند . برای آنکه : $B_1=0$ باشد لازم وکافی است که :

$$(A-C)\sin 2\alpha=2B\cos 2\alpha$$

و یا:
$$tg\,2\alpha = \frac{2B}{A-C} \qquad (8)$$

باشد. در حالت خاصیکه $A = C$ است $\cos 2\alpha = 0$ بوده و محور های جدید در امتداد نیمساز های محور های قدیم خواهند بود.

برای محاسبه A_1 و C_1 مجموع و تفاضل این مقادیر را حساب میکنیم:

$$A_1 + C_1 = A + C \quad \text{و} \quad A_1 - C_1 = (A - C)\cos 2\alpha + 2B\sin 2\alpha$$

میباشند حال طبق (۸)

$$\cos 2\alpha = \varepsilon \frac{A-C}{\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}} \quad \text{و} \quad \sin 2\alpha = \varepsilon \frac{2B}{\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}$$

واز آنجا:
$$A_1 - C_1 = \varepsilon \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}$$

خواهد شد. و چون مجموع $A_1 + C_1$ و تفاضل $A_1 - C_1$ را میدانیم این مقادیر را میتوان حساب نمائیم.

و نیز ممکن است حاصل ضرب این مقادیر را حساب نمود بدینمنظور چون:

$4A_1C_1 = (A_1 + C_1)^2 - (A_1 - C_1)^2$ میباشد پس در اینحال:

$4A_1C_1 = 4(AC - B^2)$ شده وازآنجانتیجه‌میشود که نیزمیتوان‌ضرایب X^2 و Y^2 معادله جدید را ریشه‌های معادله درجه دوم زیر گرفت:

$$S^2 - (A + C)S + AC - B^2 = 0$$

معادله ساده شده - پس میتوان با انتخاب یك دستگاه محور های مختصات جدید معادله هرمنحنی رده اول را بصورت

$$A_1X^2 + C_1Y^2 + \frac{\Delta}{f} = 0$$

نوشت. پس اگرمنحنی بدوخط تجزیه نشود Δ مخالف صفر بوده ودوحالت برحسب نوع منحنی تشخیص داده میشود:

۱- منحنی از نوع بیضی است - C_1 و A_1 هم علامت بوده و چنانکه این علامت باعلامت $\frac{\Delta}{f}$ یکی باشد میتوان تمام عوامل را بر $\frac{\Delta}{f}$ بخش‌نموده ومعادله

را بصورت :

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+1=0 \qquad (9)$$

نوشت . a و b در اینحال ریشه های دوم اعداد $\frac{\Delta}{f A_1}$ و $\frac{\Delta}{f C_1}$ خواهند بود .

منحنی که توسط این معادله نمایش داده شده است دارای هیچ نقطه حقیقی نبوده گویند نمایش یك بیضی موهومی را میدهد .

چنانکه علامت $\frac{\Delta}{f}$ مخالف علامت A_1 و C_1 باشد میتوان تمام عوامل را بر $\frac{-\Delta}{f}$ بخش نموده ومعادله را بصورت :

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1=0 \qquad (10)$$

نوشت . a و b در اینحال ریشه های دوم اعداد $\frac{-\Delta}{f A_1}$ و $\frac{-\Delta}{f C_1}$ بوده و میدانیم که معادله (۱۰) نمایش یك بیضی حقیقی را میدهد . و برحسب آنکه a بزرگتر ویا کوچکتر از b باشد محور های کانونی آن ΩX و یا ΩY خواهند بود .

چنانکه $b=a$ باشد منحنی دایره بوده دراینحال $A=C$ و $B=0$ است

۳ - منحنی از نوع هذلولی است - در اینحال A_1 و C_1 دارای علامات مختلف بوده وچون فرض کنیم که علامت ضریب X^2 همان علامت $\frac{-\Delta}{f}$ میباشد پس از تقسیم تمام عوامل بر $\frac{-\Delta}{f}$ معادله بصورت :

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-1=0 \qquad (11)$$

نوشته میشود و چنانکه A_1 و $\frac{-\Delta}{f}$ مختلف العلامه باشند پس ازتغییر ΩX به ΩY و بالعکس باز همان نتیجه بدست خواهد آمد . در اینجا a و b جذر های $\frac{-\Delta}{f A_1}$ و $\frac{\Delta}{f C_1}$ میباشند معادله (۱۱) یك هذلولی که محور کانونی آن ΩX است نمایش میدهد .

حالت دوم - منحنی از رده دوم میباشد - معادله آنرا میتوان بصورت :

$$\frac{1}{A}(Ax+By)^2+2Dx+2Ey+F=0$$

با فرض آنکه $A\neq 0$ باشد نوشت .

محور هـای مختصات را حول مبداء O طوری دوران میدهیم که محور جدید Ox' بموازات امتداد مجانب قرار گیرد . Oy' را عمود بآن انتخاب میکنیم $\alpha=(Ox, Ox')$ بوده دستور های تغییر مختصات :

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \qquad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

خواهند بود . معادله منحنی پس ازقراردادن این مقادیر بصورت زیر درخواهدآمد :

$$\frac{1}{A}\left[A(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+B(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)\right]^2$$
$$+2D(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+2E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+F=0$$

برای آنکه امتداد مجانب موازی محور Ox' باشد بایستی که ضریب x' در مجموع جملاتیکه بقوه دو رسیده است صفر شود و یا آنکه

$(12)\qquad A\cos\alpha+B\sin\alpha=0$ باشد . پس معادله با این شرط بصورت : $(13)\qquad C_1y'^2+2D_1x'+2E_1y'+F=0$ نوشته خواهد شد . در این معادله :

$$C_1=\frac{(A\sin\alpha-B\cos\alpha)^2}{A} \text{ و } D_1=D\cos\alpha+E\sin\alpha,\ E_1=-D\sin\alpha+E\cos\alpha$$

میباشند . از بستگی (۱۲) $tg\,\alpha=-\frac{A}{B}$ بدست آمده و از آنجا دو نیم خط جهت Ox' خواهیم داشت . یکی از آنها را انتخاب کرده و مقادیر

$$\cos\alpha=\frac{-B}{\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}} \text{ و } \sin\alpha=\frac{A}{\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}}$$

$(\varepsilon=\pm 1)$ را ازآنجا بدست میآوریم . چنانکه این مقادیر را بجای $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در C_1 و D_1 قرار دهیم :

$$C_1=\frac{A^2+B^2}{A} \qquad \text{و} \qquad D_1=\frac{AE-BD}{\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}}$$

خواهند شد . محاسبه E_1 لزومی نداشته ومیتوان بهمین ترتیب حساب نمود .

ازطرفی $AE - BD = -e$ بوده وچون : $A\triangle = cf - e^2$ و $f = 0$ است پس $e = \pm\sqrt{-A\triangle}$ خواهد شد. وچون نیز $B^2 = AC$ است پس بالاخره :

$$C_1 = A + C \quad \text{و} \quad D_1 = \pm\sqrt{-\frac{\triangle}{A+C}}$$

میباشند . باید یاد آور شد که چنانکه معادله منحنی نمایش یك شلجمی را بدهد $\triangle$ مخالف صفر بوده ودر نتیجه $D_1 \neq 0$ است .

و همچنین چون C و A هم علامتند پس $C + A$ نیز صفر نخواهد بود .

حال محور های مختصات را بموازات خود حرکت داده تا مبداء را بنقطه (x_0, y_0) منتقل نمائیم . معادله (۱۳) بصورت :

$$C_1(y_0 + Y)^2 + 2D_1(x_0 + X) + 2E_1(y_0 + Y) + F = 0,$$

$$C_1 Y^2 + 2D_1 X + 2Y(C_1 y_0 + E_1) + C_1 y_0^2 + 2D_1 x_0 + 2E_1 y_0 + F = 0$$ ویا :

نوشته خواهد شد . حال x_0 و y_0 را طوری تعیین میکنیم که ضریب Y و مقدار ثابت هردو صفر باشند . یعنی

$$C_1 y_0 + E_1 = 0, \qquad C_1 y_0^2 + 2D_1 x_0 + 2E_1 y_0 + F = 0$$

باشند . معادله اول مقدار y_0 را بماداده وازدومی x_0 بدست میآید پس ازآنجا معادله منحنی

$$C_1 Y^2 + 2D_1 X = 0,$$

راکه معادله یك شلجمی نسبت بمحور ومماس دررأس آنست بدست خواهیم آورد .

قدر مطلق $\frac{D_1}{C_1}$ بپارامتر شلجمی موسوم بوده و چنانچه آنرا به p نمایش دهیم معادله منحنی : $Y^2 - 2pX = 0$ خواهد شد . زیرا همیشه میتوان سوی مثبت X را طوری انتخاب نمود کـه ضریب X منفی باشد . چنانکه بجای C_1 و D_1 مقادیر شانرا قرار دهیم : $p = \sqrt{-\frac{\triangle}{(A+C)^3}}$ خواهد شد .

حالت سوم ــ منحنی از رده سوم میباشد ــ معادله آنرا بصورت :

$$(lx + my)^2 + 2h(lx + my) + F = 0$$

و یا :
$$(lx+my+h)^{۲}=h^{۲}-F$$

نوشته . خطیکه معادله آن $lx+my+h=۰$ است محور $X'X$ جدید میگیریم . X و Y را مختصات جدید نقطه گرفته :

$$Y^{۲}=\frac{(lx+my+h)^{۲}}{l^{۲}+m^{۲}}$$

خواهد شد . معادله منحنی در دستگاه جدید مختصات :

$$Y^{۲}=\frac{h^{۲}-F}{l^{۲}+m^{۲}}$$

شده وچنانکه می بینیم ازدوخط موازی تشکیل میشود این دوخط حقیقی ومتمایزند چنانکه $h^{۲}-F>۰$ باشد ودرصورت عکس موهومی بوده وچنانکه $h^{۲}-F=۰$ باشد برهم منطبق خواهند بود .

پس همانطور که در پیش گفتیم مطالب بالا را خلاصه کرده و گوئیم که هرمنحنی درجه دوم حقیقی وتجزیه نشده یك بیضی ویا یك هذلولی ویا یك شلجمی خواهد بود .

۱۸۰- شرط آنکه یك معادله درجه دوم نمایش یك هذلولی متساوی- الساقین را بدهد - برای آنکه معادله :

$$Ax^{۲}+۲Bxy+Cy^{۲}+۲Dx+۲Ey+F=۰$$

نمایش یك هذلولی متساوی الساقین را بدهد بایدکه معادله :

$$Ax^{۲}+۲Bxy+Cy^{۲}=۰$$

دوخط عمود بهم را نمایش داده ودر نتیجه : $A+C=۰$ باشد .

وبرعکس چنانچه $A+C=۰$ باشد امتداد های مجانب منحنی برهم عمود بوده ومنحنی یك هذلولی متساوی الساقین خواهد بود .

پس ازآنجا نتیجه میشودکه درصورت قائم بودن محورهای مختصات معادله :

$$A(x^{۲}-y^{۲})+۲Bxy+۲Dx+۲Ey+F=۰$$

معادله کلی هذلولی های متساوی الساقین خواهد بود .

۱۸۱ - معادله سه جملهٔ مشترك مخروطات - نقطه برخورد هرمخروطی

با یکی از محور هایش رأس نامیده شده و از آنجا دیده میشود که هر بیضی حقیقی دارای چهاررأس حقیقی و هرهذلولی دارای دورأس وشلجمی دارای یك رأس میباشد.

حال یکی ازاین رأسهای حقیقی‌را مبداء مختصات گرفته محور Ox را محوریکه ازاین رأس گذشته و Oy را مماس دراین نقطه میگیریم. دراینصورت بازاء هرمقدار x معادله منحنی دو مقدار مخالف هم y بآن مربوط بوده و از آنجا نتیجه میشود که این معادله شامل هیچ عامل درجه اول y نمیتواند باشد. از طرفی منحنی از مبداء مختصات گذشته ودرنتیجه معادله آن مقدار ثابت نیز نخواهد داشت پس میتوان این معادله را بصورت $y^2 = 2px + qx^2$ نوشت. پس این معادله بازاء مقادیر مختلف p و q، هرمخروطی را درمختصات قائم نمایش خواهد داد.

قطر ها

۱۸۴ - نقاط برخورد مخروطی با یك خط - خمهائی که در این قسمت بررسی مینمائیم تجزیه نشده فرض کرده و نام مخروطی را بآنها اختصاص میدهیم. معادله مخروطی (C) را $f(x, y) = 0$ فرض کرده خط $\triangle$ را توسط مختصات (x_0, y_0) نقطه M_0 و پارامترهای هادی (α, β) آن‌که تصاویر بردار $\overrightarrow{M_0B}$ فرض شده‌اند تعیین میکنیم.

مختصات یك نقطهٔ M این‌خط را چنانکه دیدیم بصورت $x_0 + \rho\alpha, y_0 + \rho\beta$ با شرط آنکه $\overrightarrow{M_0M} = \rho . \overrightarrow{M_0B}$ باشد میتوان نوشت. مقادیر ρ مربوط بنقاط برخورد $\triangle$ و (C) ریشه های معادله

$$f(x_0 + \rho\alpha, y_0 + \rho\beta) = 0 \qquad (1)$$

بوده و با استفاده از دستور تیلور برای کثیرالجمله های درجه دوم بصورت:

$$0 = f(x_0, y_0) + \rho[\alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta f'_y(x_0, y_0)] + \rho^2 \varphi(\alpha, \beta) \qquad (2)$$

نوشته میشود. دراین معادله نیز $\varphi(x, y)$ مجموع عوامل درجه دوم خواهد بود.

چنانکه امتداد $\triangle$ امتداد مجانب مخروطی نباشد $\varphi(\alpha, \beta)$ مخالف صفر

بوده و خط △ منحنی را در دو نقطه که ممکن است حقیقی ، موهومی ، مجزا و یا منطبق برهم باشند قطع خواهدکرد .

چنانکه مخروطی هذلولی و △ یکی از امتداد های مجانب باشد معادله (۲) معمولا درجه اول شده و برای آنکه این خط هذلولی را در هیچ نقطه بفاصله معین قطع نکند بایستی که △ مجانب باشد . حال برای آنکه این شرط برقرار باشد لازم و کافی است که مختصات نقطه M_0 در معادله

$$\alpha f'_x(x,y) + \beta f'_y(x,y) = 0 \qquad (۳)$$

صدق نمایند.

پس از آنجا نتیجه میشود که چنانکه α و β پارامتر های هادی یکی ازامتداد های مجانب باشد معادله (۳) معادله مجانب موازی آن امتداد خواهد بود .

۱۸۳ ـ قطر یك مخروطی ـ قضیه ـ مکان هندسی اوساط وترهائی موازی امتداد δ غیر مجانب ، خطی که قطر امتداد δ نامیده میشود خواهد بود .

α و β را پارامترهای هادی امتداد δ فرض کرده برای آنکه $M(x,y)$ وسط وتری موازی δ باشد لازم و کافی است که خطیکه از این نقطه موازی δ رسم میشود (C) را دردو نقطه P' و P'' قرینه نسبت به M قطع نماید. حال مقادیر ρ مربوط بنقاط P' و P'' از معادله :

$$f(x,y) + \rho\,[\,\alpha f'_x(x,y) + \beta f'_y(x,y)\,] + \rho^2 \varphi(\alpha,\beta) = 0$$

بدست آمده و برای آنکه P' و P'' نسبت به M قرینه باشند لازم و کافی است که $\rho' + \rho'' = 0$ یعنی بستگی

$$\alpha f'_x(x,y) + \beta f'_y(x,y) = 0 \qquad (٤)$$

برقرار باشد . ρ' و ρ'' مقادیر ρ مربوط بنقاط P' و P'' میباشند .

حال معادله (٤) نمایش خطی در فاصله نزدیك را میدهد زیرا

$$f'_x(x,y) \equiv \varphi'_x(x,y) + 2D \quad \text{و} \quad f'_y(x,y) \equiv \varphi'_y(x,y) + 2E$$

بوده و معادله (٤) بصورت :

$$\alpha \varphi'_x(x, y) + \beta \varphi'_y(x, y) + ۲D\alpha + ۲E\beta = ۰$$

نوشته میشود . چون φ تابع همگنی نسبت به x و y میباشد پس معادله بالارا میتوان بصورت : $x \varphi'_\alpha(\alpha, \beta) + y \varphi'_\beta(\alpha, \beta) + ۲D\alpha + ۲E\beta = ۰$

نیز نوشت . φ'_α و φ'_β هردو در عین حال صفر نمیتوانند باشند زیرا در اینحال $\alpha \varphi'_\alpha + \beta \varphi'_\beta$ نیز صفر شده و چون این مقدار طبق بستگی اولر مساوی $۲\varphi(\alpha, \beta)$ و بنا بفرض مخالف صفر است پس این دو مقدار نیز با هم صفر نخواهند بود .

تبصره ـ چنانکه m را ضریب زاویه امتداد δ فرض کنیم قطر این امتداد بمعادله : $f'_x(x, y) + mf'_y(x, y) = ۰$ خواهد بود .

۱۸۴ ـ اقطار مخصوص ـ حال فرض کنیم $\varphi(\alpha, \beta) = ۰$ باشد امتداد δ مجانب بوده وهرخط موازی آن منحنی را دریك نقطه واقع دربینهایت قطع خواهد کرد . دراینحال قطرمزدوج وجود نداشته ومعادلهٔ که ریشه‌های ρ را میدهد بصورت:

$$f(x, y) + \rho(\alpha f'_x + \beta f'_y) = ۰$$

نوشته میشود . حال بررسی نموده ومی بینیم که معادله : (٥) $\alpha f'_x + \beta f'_y = ۰$ و یا : $x \varphi'_\alpha + y \varphi'_\beta + ۲(D\alpha + E\beta) = ۰$ نمایش چه خطی‌را خواهد داد . وچون بیضی دارای امتداد مجانب حقیقی نمیباشد این بررسی را فقط در مورد هذلولی وشلجمی مینمائیم .

حالت اول ـ مخروطی از نوع هذلولی است ـ در اینحال

$$\frac{۱}{۲}\varphi'_\alpha = A\alpha + B\beta \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۲}\varphi'_\beta = B\alpha + C\beta$$

بوده و چون $AC - B^۲ \neq ۰$ است پس φ'_α و φ'_β هردو با هم صفر نبوده و معادله (٥) نمایش یك خط $\triangle$ را میدهد .

این خط مکان نقاطی است بطوریکه اگر از یکی از آنها خطی موازی δ

رسم کنیم منحنی را در دو نقطه بینهایت قطع خواهد کرد .

حال دو خط δ و $\triangle$ موازی بوده زیرا

$$\alpha \varphi'_\alpha + \beta \varphi'_\beta = 2 \varphi(\alpha, \beta) = 0$$

میباشد . پس از آنجا نتیجه میشود که تمام خطوطیکه از نقاط مختلف $\triangle$ موازی δ رسم شده باشند براین خط منطبق خواهند بود .

پس خط $\triangle$ تنها خطی است که موازی δ بوده ومنحنی را دردو نقطه بینهایت قطع خواهد کرد و از آنجا دیده میشود که این خط ، مجانب مربوط بامتداد مجانب δ میباشد .

پس میتوان مجانبهای هذلولی را قطرهای مخصوص بطوریکه هر کدام از آنها مزدوج امتداد خودش باشد فرض نمود .

حالت دوم ـ مخروطی از نوع شلجمی است ـ در اینحال φ را میتوان بصورت : $\varphi(x, y) \equiv (ux + vy)^2$ نوشت وچون α ، β پارامترهای هادی امتداد مجانب اند پس $u\alpha + v\beta = 0$ و در نتیجه :

$$\frac{1}{2}\varphi'_\alpha = u(u\alpha + v\beta) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{1}{2}\varphi'_\beta = v(u\alpha + v\beta) = 0$$

خواهند بود معادله ایکه ریشه های ρ را میدهد در اینحال :

$$f(x, y) + 2\rho(D\alpha + E\beta) = 0$$

بوده ومیتوان گفت که در اینحال قطر مربوط به بینهایت رفته است . در نتیجه هر خط موازی امتداد مجانب یك شلجمی منحنی را در یك نقطه در بینهایت و در یك نقطه درفاصله نزدیك قطع خواهد نمود .

۱۸۵ ـ وضعیت اقطار ـ قضیه ۱ ـ درخمهائیکه دارای یك مرکز میباشند هر قطر از مرکز گذشته و برعکس هر خط که از مرکز بگذرد یك قطر واقعی یا مخصوص خواهد بود .

زیرا مختصات مرکز درمعادله یك قطر یعنی درمعادله : $\alpha f'_x + \beta f'_y = 0$ صدق کرده و برعکس چون مرکز نقطه ایست که از برخورد دوخط $f'_x = 0$ و $f'_y = 0$

بدست میآید پس هر خط که از این نقطه بگذرد بمعادله : $\lambda f'_x + \mu f'_y = 0$
بوده واین خط را میتوان قطرمزدوج امتدادی بپارامترهای هادی λ و μ فرض نمود .

قضیه ۳ - درشلجمی تمام اقطار موازی امتداد مجانب بوده وبرعکس هرخط که موازی امتداد مجانب باشد یك قطر خواهد بود . .

چون معادله شلجمی بصورت :

$$f(x, y) \equiv (ux + vy)^2 + 2Dx + 2Ey + F$$

نوشته میشود پس

$$\alpha f'_x + \beta f'_y \equiv 2\alpha[u(ux+vy)+D] + 2\beta[v(ux+vy)+E]$$

خواهد شد . از آنجا معادله قطر مزدوج امتداد (α, β)

$$(u\alpha + v\beta)(ux + vy) + D\alpha + E\beta = 0$$

بوده و دیده میشود که این خط موازی امتداد مجانب میباشد .

و برعکس خط $ux + vy + \lambda = 0$ را موازی امتداد مجانب فرض کرده چنانکه α و β را طوری انتخاب کنیم که $\lambda = \frac{D\alpha + E\beta}{u\alpha + v\beta}$
باشد معادله خط مزبور بصورت معادله قطر مزدوج امتداد (α, β) نوشته خواهد شد . از این معادله α و β را با تقریب یك ضریب میتوان پیدا نمود .

۱۸۶ - خواص قطر ها - ۱ - نقاط تماس مماسهای موازی L یك مخروطی همان نقاط برخورد منحنی وقطر مزدوج امتداد L میباشند .

نقطه $M(x, y)$ را روی مخروطی گرفته شرط آنکه مماس در این نقطه موازی L باشد آنستکه : $\alpha f'_x + \beta f'_y = 0$ باشد . این بستگی نشان میدهد که M روی قطر D مربوط بامتداد L واقع میباشد .

۲- خطوط مرکز یك مخروطی قطر های امتدادهای محورهای مختصات میباشند .

معادلات $f'_x = 0$ قطرمزدوج امتداد Ox و $f'_y = 0$ قطر مزدوج امتداد Oy را نمایش میدهند .

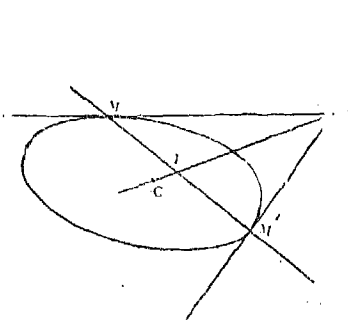
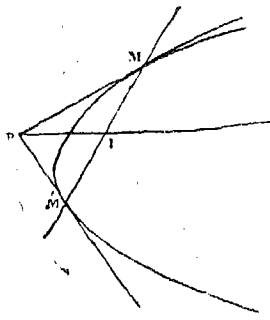
۳ - M و M' را نقاط تماس مماسهای وارد از نقطه P گرفته قطر مزدوج

امتداد $M M'$ از نقطه P خواهد گذشت .

x_0 و y_0 را مختصات P گرفته مختصات نقاط تماس یعنی M و M' از حل دو معادله :

$$(۱) \quad f(x, y) = ۰ \quad و \quad (۲) \quad (x_0 - x) f'_x + (y_0 - y) f'_y = ۰$$

بدست میآیند . چون دراین معادلات x و y را مختصات نقطهٔ غیر مشخصی فرض کنیم دیده میشود که معادله (۱) نمایش منحنی مفروض و معادله (۲) نمایش یك خط را میدهند . پس میتوان گفت که نقاط تماس مماسهای خارج ازیکنقطه P برمنحنی همان نقاط برخورد منحنی با یك خط که وتر تماس نامیده میشود خواهند بود . حال پس از محاسبه دیده میشود که میتوان یك دستگاه پارامتر های هادی این خط را مقادیر $\alpha = f'_{y_0}$ و $\beta = -f'_{x_0}$ گرفت وازآنجا قطر مزدوج این امتداد بمعادله : $f'_{y_0} f'_x - f'_{x_0} f'_y = ۰$ خواهد بود . ازاین معادله دیده میشود که قطر مزدوج امتداد $M M'$ از $P(x_0, y_0)$ میگذرد .

پس از آنجا نتیجه میشود که چنانکه منحنی دارای یك مرکز باشد خطیکه نقطه P را بوسط I وتر $M M'$ وصل میکند از مرکز خواهد گذشت . و چنانکه منحنی شلجمی باشد خط $P I$ موازی امتداد مجانب خواهد بود .

ش ۵۳ ش ۵٤

۱۸۷ ـ قطرهای مزدوج ـ چنانکه قطرمزدوج امتداد L موازی امتداد L' باشد بالعکس نیز قطر مزدوج L' موازی L خواهد بود .

پارامترهای‌هادی L و 'L را (α, β) و (α', β') گرفته‌معادله‌قطرمزدوج L

$$x\,\varphi'_{\alpha} + y\,\varphi'_{\beta} + ۲\,(D\alpha + E\beta) = ۰$$

میباشد. چنانکه این خط موازی 'L باشد $\alpha'\,\varphi'_{\alpha} + \beta'\,\varphi'_{\beta} = ۰$ بوده وچون این بستگی را بصورت: $\alpha\,\varphi'_{\alpha'} + \beta\,\varphi'_{\beta'} = ۰$ بنویسیم دیده میشود که قطر مزدوج امتداد 'L نیز که بمعادله:

$$x\,\varphi'_{\alpha'} + y\,\varphi'_{\beta'} + ۲\,(D\,\alpha' + E\,\beta') = ۰$$

است موازی امتداد $L(\alpha, \beta)$ خواهد بود.

تعریف ـ دو امتداد بطوریکه قطر مزدوج یکی،موازی دیگری باشد امتداد های مزدوج نامیده میشوند.

دوقطر بطوریکه هر کدام از آنها موازی وترهائی باشدکه دیگری بدو قسمت مساوی تقسیم میکند قطرهای مزدوج نامیده میشوند.

پس از آنجا بستگی که پارامتر های هادی (α, β) و (α', β') دوامتداد و یا دو قطر مزدوج را بهم مربوط میکنند:

$$\alpha'\,\varphi'_{\alpha} + \beta'\,\varphi'_{\beta} = ۰ \quad \text{و یا} \quad \alpha\,\varphi'_{\alpha'} + \beta\,\varphi'_{\beta'} = ۰$$

و یا

$$A\,\alpha\alpha' + B\,(\alpha\beta' + \beta\alpha') + C\,\beta\beta' = ۰$$

خواهد بود.

واضح است که این تعاریف فقط درمورد بیضی وهذلولی قابل قبولند.

چنانکه امتداد L توسط ضریب زاویه اش m معلوم باشد پارامتر هـای هادی آنرا میتوان ۱ و m گرفت و در نتیجه قطر مزدوج این امتداد بمعادله:

$$x\,(A + Bm) + y\,(B + Cm) + D + Em = ۰ \quad \text{و یا} \quad f'_{x} + m f'_{y} = ۰$$

خواهد بود. چنانکه ضریب زاویه خط اخیر را m' فرض کنیم مقدار آن $m' = -\dfrac{A + Bm}{B + Cm}$ میباشد. این رابطه را میتوان بصورت زیر که بستگی بین ضریب زاویه های دو امتداد مزدوج است نوشت:

$$C\,m\,m' + B\,(m + m') + A = ۰$$

محورهای مخروطی

۱۸۸ ـ تعریف ـ محور مخروطی قطری است عمود بوتر هائی که آن قطر باید بدو قسمت مساوی تقسیم کند.

امتداد عمود بمحوررا امتداد اصلی نامند. m را ضریب زاویه امتداد L فرض کرده قطر مزدوج این امتداد بضریب زاویه $m' = -\frac{A + Bm}{B + Cm}$ میباشد. برای آنکه این قطرعمود بامتداد L باشدبایستی که $mm' = -1$ و یاآنکه چنانچه بجای m' مقدارش را قرار دهیم:

$$(1) \qquad Bm^2 + (A - C)m - B = 0$$

باشد. ریشه‌های این معادله ضریب زاویه های امتداد های اصلی خواهند بود. بازاء هرریشه حقیقی m_1 این معادله که ضریب زاویه امتداد مجانب نباشد یك محور عمود بامتداد m_1 مربوط بوده و معادله آن: $f'_x + m_1 f'_y = 0$ خواهد بود. معادله (۱) همیشه دارای ریشه‌های حقیقی ومجزا است زیرا که دو عامل اول وآخر مختلف‌العلامه میباشند. بعلاوه حاصل ضرب ریشه‌های آن ۱ ـ بوده واز آنجا نتیجه میشود که امتداد های اصلی حقیقی وعمود بهم میباشند.

و نیز امتداد های اصلی نیمساز های امتداد های مجانب میباشند.

۱۸۹ ـ معادله محورها ـ m_1 و m_2 را ضریب زاویه های امتداد های اصلی گرفته معادلات دو محور $f'_x + m_2 f'_y = 0$ ، $f'_x + m_1 f'_y = 0$ میباشند. پس معادله مجموع آنها: $(f'_x + m_1 f'_y)(f'_x + m_2 f'_y) = 0$ (۲) خواهد بود. حال m_1 و m_2 ریشه های معادله (۱) بوده و چنانکه این معادله را بصورت: $(m - m_1)(m - m_2) = 0$ بنویسیم دیده میشود که معادله (۲) از قرار دادن $-\frac{f'_x}{f'_y}$ بجای m درمعادله اخیر بدست میآید. پس از آنجا برای بدست آوردن معادله مجموع محور های یك بیضی یا یك هذلولی کافی

است که در معادله (۱) بجای m مقدار $-\frac{f'_x}{f'_y}$ را قرار دهیم .

نتیجه حاصل معادله : $Bf'^{2}_x - (A - C)f'_x f'_y - Bf'^{2}_y = 0$

خواهد شد .

حالت شلجمی - چون در شلجمی دو امتداد مجانب برهم منطبق اند نیمساز های آنها یکی همان امتداد مجانب و دیگری خطی عمود بآن خواهد بود . پس از آنجا نتیجه میشود که ریشه‌های معادله (۱) ضریب زاویه‌های این امتداد ها میباشند . در اینحال امتداد مجانب یك امتداد اصلی مخصوص بوده و بآن محوری مربوط نمیباشد . درصورتیکه امتداد عمود بآن یك امتداد اصلی حقیقی بوده ومحورمربوطه آن موازی امتداد مجانب است .

پس از آنجا میتوان گفت که در شلجمی فقط یك محور که قطر مزدوج امتداد عمود بامتداد مجانب است وجود خواهد داشت . از آنچه گفته شد نتیجه میشود که چنانکه معادله یك شلجمی :

$$f(x,y) \equiv \frac{1}{A}(Ax + By)^{2} + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

باشد معادله محور آن : $Af'_x + Bf'_y = 0$ خواهد شد .

۱۹۰ - راوس - محل برخورد هرمحور ومخروطی‌را رأس مخروطی نامند .

برحسب خواص قطرها مماس برمخروطی دریك رأس عمود بمحوریکه ازآن نقطه میگذرد خواهد بود .

بیضی وهذلولی هر کدام دارای چهار رأس بوده این چهاررأس دربیضی حقیقی و دوتای آنها فقط در هذلولی حقیقی میباشند .

در مورد شلجمی ، محور موازی امتداد مجانب بوده وبا منحنی در یك نقطه برخورد نموده واز آنجا شلجمی دارای یك رأس میباشد .

کانون و هادی

۱۹۱ - تعریف - نقطهٔ F راکانون مخروطی‌نامند هرگاه فاصلهٔ آن ازهرنقطه M مخروطی تابع خطی از مختصات M باشد یعنی بطوریکه :

$$MF = |lx + my + h| \qquad (1)$$

برحسب آنکه x و y را مختصات نقطه M بگیریم باشد.

باید یاد آور شد که این تعریف بستگی بمحور های مختصات نداشته زیرا چنانکه محورهای جدیدی انتخاب‌کنیم x و y توابع خطی از مختصات جدید x' و y' بوده ودر نتیجه باز هم MF تابع خطی برحسب x' و y' خواهد بود.

چنانکه α و β مختصات F فرض شوند بستگی (۱) را میتوان بصورت :

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = |lx + my + h|$$

و یا :

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (lx + my + h)^2$$

نیز نوشت. چون این معادله از درجه دوم است و مختصات هر نقطه منحنی در آن نیز صدق میکند میتوان آنرا معادله مخروطی فرض نموده و نیز باید گفت که فقط مخروطات اندکه تعریف کانون بدینطریق درباره آنها صادق میباشد.

خط هادی مربوط بیك‌کانون خطی‌است که‌معادلهٔ آن ازمساوی‌صفرقراردادن فاصله F تا یکنقطه M منحنی بدست آید. چنانکه بستگی (۱) بین F و M برقرار باشد خط هادی مربوط بکانون F بمعادلهٔ : $lx + my + h = 0$ خواهد بود.

۱۹۲ - قضیه - نسبت فواصل هر نقطه مخروطی از کانون و از خط هادی مربوطه مقداری ثابت میباشد.

کانون مخروطی را F گرفته و $M(x, y)$ را نقطهٔ از منحنی فرض میکنیم چون : $MF = |lx + my + h|$ است و از طرفی فاصلهٔ MP نقطه M از هادی : $MP = \dfrac{|lx + my + h|}{\sqrt{l^2 + m^2}}$ میباشد پس : $\dfrac{MF}{MP} = \sqrt{l^2 + m^2}$ بوده وازآنجا نتیجه میشود که این نسبت مقداریست ثابت. این نسبت را خروج از مرکز مربوط بکانون F نامند.

قضیه وارون - مکان نقاطیکه نسبت فواصلشان از یکنقطه ثابت F و یك خط D مقداری ثابت باشد یك مخروطی بکانون F و بخط هادی D خواهد بود .

محور های مختصات را عمود بهم و از نقطه F طوری مرور میدهیم که Oy موازی D و بمعادله $x - a = 0$ باشد . شرط آنکه نسبت فاصله نقطه $M(x, y)$ از مبداء O واز خط D مساوی عدد ثابت e باشد آنستکه :

$$x^2 + y^2 = e^2 (x - a)^2$$

باشد این شرط معادله مکان مطلوب ودیده میشودکه نمایش یك مخروطی‌را میدهد.
چون این معادله را بصورت :

$$x^2 (1 - e^2) + y^2 + 2 a e^2 x - a^2 e^2 = 0$$

بنویسیم دیده میشودکه مبین آن $- a^2 e^2$ بوده وازآنجا چنانکه a مخالف صفر باشد مکان مطلوب مخروطی واقعی خواهد بود چون $A C - B^2 = 1 - e^2$ است پس اگر e کوچکتر ، بزرگتر و یا مساوی یك باشد مخروطی بیضی ، هذلولی و یا شلجمی خواهد شد . پس میتوان تعریف دیگر زیر را جهت‌کانون نمود :

نقطه F را کانون مخروطی گویند چنانکه بتوان خطی مثلا D پیدا نمود بطوریکه نسبت فاصله هر نقطه منحنی ازاین نقطه واین‌خط مساوی مقدارثابتی باشد .

۱۹۳ - طرز پیدا کردن کانونها - معادله منحنی را بصورت کلی $f(x, y) = 0$ (۱) نسبت بمحورهای عمود بهم گرفته چنانکه نقطه (α, β) کانون آن باشد معادله این منحنی بصورت :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (lx + my + h)^2 = 0 \qquad (2)$$

نیز نوشته میشود . وچون این دو معادله نمایش یك خم را میدهند پس باید ضرایب آنها باهم متناسب باشند وازآنجا پنج شرط برای پیداکردن مقادیر α ، β ، l ، m ، h خواهیم داشت .

۱۹۴ - کانونهای یك بیضی - معادله بیضی را بصورت ساده شده $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ فرض‌کرده طریقه فوق را برای بدست آوردن کانونهای

آن بکار میبریم . بدینمنظور باید مقادیر α ، β ، l ، m ، h را طوری پیدا نمود که معادله فوق بصورت (۲) نوشته شود و یا آنکه باید شش مقدار S ، α ، β ، l ، m ، h را بطوریکه در بستگی :

$$(۳) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\equiv S\left[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(lx+my+h)^2\right]$$

صدق کنند پیدا نمود . ضریب xy شرط : $Slm=0$ و یا $lm=0$ را بما داده و چون S مخالف صفر است از آنجا دو ریشه : $l=0$ و $m=0$ بدست میآیند . چنانکه ریشه $m=0$ را انتخاب کنیم ضرایب y^2 و y بستگی های $S=\frac{1}{b^2}$ و $\beta=0$ را بما خواهند داد . در نتیجه بقیه اتحاد بالا بصورت

$$\frac{x^2}{a^2}-1\equiv\frac{1}{b^2}\left[(x-\alpha)^2-(lx+h)^2\right]$$

نوشته شده وچون آنرا بصورت :

$$(٤) \qquad x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-2\alpha x+\alpha^2+b^2\equiv(lx+h)^2$$

بنویسیم بستگی $\alpha^2-(\alpha^2+b^2)\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=0$ نتیجه میشود از آنجا مقدار $\alpha^2=a^2-b^2$ و یا $\alpha=\pm c$ پس ازقراردادن $c^2=a^2-b^2$ بدست میآید . و بالاخره بازاء هریك از مقادیر α معادله (٤) بصورت

$$a^2-2\alpha x+\frac{\alpha^2x^2}{a^2}\equiv(lx+h)^2$$

نوشته شده ومیتوان مقادیر زیررا جهت h و l نوشت : $h=a$ و $l=-\frac{\alpha}{a}$

پس بطور خلاصه مقادیر

$$m=0 \quad S=\frac{1}{b^2} \quad \beta=0 \quad \alpha=\pm c \quad h=a \quad l=-\frac{\alpha}{a}$$

یکدستگاه جوابهای مسئله بوده و دستگاه دیگر که از شرط $l=0$ شروع میشود مقادیر $\beta^2=b^2-a^2$ $\alpha=0$ $S=\frac{1}{a^2}$ را بما خواهد داد

و چون $a > b$ است این دستگاه ریشه های حقیقی نداشته و دو کانون موهومی تعیین مینماید .

پس نتیجه میشود که هر بیضی دارای دو کانون حقیقی $F(c,0)$ و $F'(-c,0)$ واقع روی محور اطول بوده وخط هادی مربوط بهر کدام از آنها $\left(a - \frac{\alpha x}{a} = 0\right)$ عمود بهمین محور خواهد بود . و بالاخره خروج از مرکز مربوط بهر کدام $e = \sqrt{l^2 + m^2} = \frac{c}{a}$ بوده و نیز دیده میشود که این مقدار کوچکتر از یك میباشد .

۱۹۵- شعاع حامل یك نقطه بیضی - F را یکی‌ازکانونهای بیضی بمختصات $\alpha = \pm c$ و $\beta = 0$ فرض کرده چنانکه معادله بیضی را بصورت (۲) بنویسیم دیده میشود که فاصله هر نقطه $M(x,y)$ آن از F

$$MF = \left| lx + my + h \right| = \left| a - \frac{\alpha x}{a} \right|$$

میباشد . برای تعیین علامت طرف دوم این بستگی باید ملاحظه کرد که $\alpha = \pm c$ و x ازحیث قدر مطلق هردو کوچکتر از a بوده وازآنجا : $\frac{\alpha x}{a} < a$ نیز خواهد بود .

و در نتیجه $a - \frac{\alpha x}{a}$ همیشه مثبت است . پس : $MF = a - \frac{\alpha x}{a}$ میباشد .

۱۹۶ - قضیه - مجموع فواصل هر نقطه بیضی از دو کانون مقداری ثابت و مساوی محور اطول میباشد .

دو کانون $F(c,0)$ و $F'(c,0)$ را در نظر گرفته چنانکه دیدیم :

$$MF = a - \frac{cx}{a} \quad \text{و} \quad MF' = a + \frac{cx}{a}$$

بوده ودر نتیجه $MF + MF' = 2a$ خواهد شد .

تبصره - از آنچه گفته شد نتیجه میشود که کانونهائی که بدین ترتیب برای مخروطات تعریف کردیم منطبق بر کانونهائیکه بطریق معمولی برای این منحنیـات تعریف میکنند میباشند زیرا نظیرقضیه بالارا میتوان برای هذلولی وشلجمی نیزبهمان ترتیب ثابت نمود .

معادله مخروطات در مختصات قطبی

۱۹۷ - معادله عمومی مخروطات در مختصات قطبی - قطب را در یك کانون و محور قطبی را منطبق برمحور کانونی فرض میکنیم. خط هادی هرمخروطی دراینحال موازی Oy و بمعادلهٔ $x = -k$ بوده وازآنجا معادلهٔ هرمخروطی(۱۹۳)

$$x^2 + y^2 - e^2(x + k)^2 = 0$$

خواهدبود. چنانکه این معادله را در مختصات قطبی بنویسیم بصورت:

$$\rho^2 - e^2(\rho \cos \omega + k)^2 = 0$$

نوشته شده و دیده میشود که بدو معادله $\rho = -\dfrac{e k}{1 + e \cos \omega}$ $\rho = \dfrac{e k}{1 - e \cos \omega}$

تجزیه میشود. این دومعادله هردو نمایش یك منحنی‌را داده وچنانکه ek را مساوی p قرار دهیم معادله‌کلی مخروطات بصورت: $\rho = \dfrac{p}{1 - e \cos \omega}$ (۲)

نوشته خواهد شد.

بخش هفدهم

سطوح دوار ـ سطوح درجه دوم

۱۹۸ ـ تعریف ـ سطح دوار سطحی است که از دوران منحنی ثابتی حول محوری ایجاد شود.

G را منحنی مولد سطح ومحور zz' را محور دوران گرفته هر نقطه M منحنی در این دوران دایرهٔ که مرکز آن H روی محور و صفحهٔ آن عمود بمحور است میپیماید. این دایره را مدار سطح نامند.

میتوان بنوبه خود سطح را حادث ازحرکت این مدارات دانست. بدین ترتیب که سطح را مکان دوایریکه دارای محور zz' بوده و روی منحنی G تکیه میکنند فرض میکنیم. چنانکه منحنی غیرمشخصی روی سطح بگیریم وآنرا حول zz' دوران دهیم باز همان سطح احداث خواهد شد. و بخصوص چنانکه این سطح را با صفحهٔ که برمحور گذشته باشد قطع کنیم منحنی حاصل را نصف‌النهار نامند.

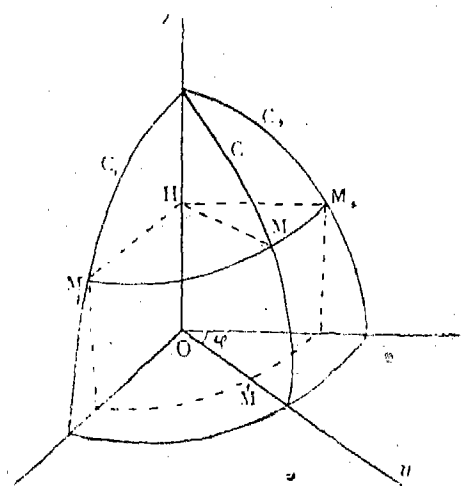
۱۹۹ ـ معادله پارامتری سطح ـ نصف‌النهار اصلی را منحنی واقع درصفحه xOz گرفته معادله آنرا $z = g(t)$ ، $x = f(t)$ (۱) فرض میکنیم.

چون پس از دوران بزاویه φ این منحنی بوضع C قرار میگیرد، در صفحهٔ که این نصف‌النهار در آن واقع است معادلهٔ آن نسبت بمحورهای uOz همان معادله منحنی نسبت بمحور های xOz بوده و بنابراین خواهیم داشت:

$$z = g(t) \qquad u = f(t) \qquad (۲)$$

چون مختصات استوانهٔ نقطه M ، u ، φ ، z میباشند پس مختصات x ، y ، z همان نقطه :

$$z = g(t) \quad y = f(t)\sin\varphi \quad x = f(t)\cos\varphi \qquad (۳)$$

خواهند شد . چنانکه t و φ تغییر کنند این معادلات تمام نقاط سطح را بما داده و از آنجا گویند معادلات پارامتری سطح میباشند . این معادلات بدو پارامتر بستگی داشته و چنانکه در آنها به φ مقدار ثابتی داده t را تغییر دهیم تمام نقاط واقع روی نصف ـ النهار φ را خواهیم داشت .

ش ۵۵

برای بدست آوردن منحنی غیر مشخصی از سطح باید در هر نصف النهار یك نقطه مشخصی را بگیریم یعنی بازاء هر مقدار φ یك مقدار معینی جهت t خواهیم داشت و از آنجا منحنی مزبور توسط یك رابطه $t = F(\varphi)$ تعیین خواهد گشت . پس نتیجه میشود که هر رابطه بین t و φ یك منحنی واقع روی سطح را تعیین مینماید .

۳۰۰ ـ معادله سطح ـ معادله سطح را میتوان همچنین توسط یك رابطه بین x ، y ، z نوشت چنانکه معادله نصف النهار مبداء $x = H(z)$ (٤) باشد برای آنکه نقطه‌ای بارتفاع z روی سطح واقع باشد لازم و کافی است که فاصلهٔ آن از محور $MH = M'O = \sqrt{x^2 + y^2}$ مساوی شعاع مدار $HM_o = x = H(z)$ مربوط بهمان ارتفاع باشد یعنی رابطه : $\sqrt{x^2 + y^2} = H(z)$ (٥) برقرار باشد . این معادله معادله سطح میباشد .

پس معادله سطح دوار از قرار دادن $\sqrt{x^2 + y^2}$ بجای x در معادله نصف النهار مبداء بدست خواهد آمد .

مثال ۱ـ مخروط دوار ـ نقطه O را مبداء ، Oz را محور و θ را نصف زاویه

رأس گرفته معادلهٔ نصف النهار مبداء $x = z\,tg\,\theta$ بوده و از آنجا معادله مخروط $\sqrt{x^2 + y^2} = z\,tg\,\theta$ خواهد شد.

طبق آنچه که گفتیم این فقط نصف مخروط بالای صفحه xy را نمایش داده قسمت دیگر آن بمعادله $\sqrt{x^2 + y^2} = -z\,tg\,\theta$ بوده ومجموع دوقسمت توسط معادله $x^2 + y^2 = z^2\,tg^2\theta$ نمایش داده میشود.

مثال ۲ ـ بیضوی دوار ـ نصف النهار در اینحال بیضی ومحور دوران یکی از محور های بیضی است چنانکه محور دوران محور کوچك بیضی باشد معادله نصف النهار $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ بوده ودر نتیجه معادله بیضوی $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ خواهد شد. چنین بیضوی را پهن یا Aplati گویند.

چنانکه محور دوران محور بزرگ بیضی باشد نصف النهار مبداء بمعادله : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ بوده ومعادله بیضوی نیز $\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ خواهد شد چنین بیضوی را کشیده یا allongé گویند.

مثال ۳ ـ هیپر بولوئید دوار یك پارچه ـ نصف‌النهارهذلولی بوده محور دوران محور عمود بمحور کانونی بمعادلهٔ : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ میباشد. پس ازآنچه که گفتیم معادله سطح $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ خواهد بود. چنانکه این سطح را با صفحه $y = a$ قطع کنیم مقطع توسط معادلات

$$y = a \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{و یا} \quad y = a \quad \frac{a^2 + x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

و یا $y = a \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ نمایش داده شده و این معادلات بدو دستگاه :

$$y = a \quad \frac{x}{a} = \frac{z}{b} \quad \text{و} \quad y = a \quad \frac{x}{a} = -\frac{z}{b}$$

تجزیه میشود.

هریك از این دو دستگاه نمایش یك خط مستقیم را داده واز آنجا مقطع از دو خط که در روی مجانبهای نصف النهار مبداء تصویر میشوند تشکیل میشود.

از دوران هر کدام از این خطها سطح مزبور احداث شده گویند این سطح دارای دو دستگاه مولد مستقیم الخط میباشد . از هر نقطه سطح دو خط که هر کدام از یکدستگاه میباشند میگذرند .

و **برعکس** - چنانکه محور $z'z$ وخط غیر مشخص G که آنرا قطع نکرده وبا آن نیز موازی نباشد مفروض باشند از دوران خط اخیر در حول محور $z'z$ باز همان سطح احداث خواهد شد .

برای اثبات کافی است که عمود مشترك این دوخط را محور y ها گرفته وطول آنرا برابر a فرض کنیم . خط G چون عمود به Oy است موازی صفحه xOz بوده وتصویر آن روی این صفحه از O خواهد گذشت . پس معادلات آن :

$y = a \quad \frac{x}{a} = \frac{z}{b}$ میباشد . سطح حاصل از دوران آن حول Oz طبق آنچه که گفتیم $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ خواهد شد .

پس ازدوران یك خط درحول یك محور هیپربولوئید دوار یك پارچه احداث شده و چنانچه این خط محور را قطع کرده یا موازی آن باشد سطح حاصل مخروط و یا استوانه خواهد شد .

مثال ۴ - هیپر بولوئید دوار دو پارچه - چنانکه محوردوران محور کانونی هذلولی باشد سطح حاصل از دو قسمت قرینه نسبت بصفحهٔ عمود بمحور تشکیل شده وهیپربولوئید دوار دو پارچه خواهد شد . معادله نصف النهار :

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{و معادله سطح :} \quad \frac{z^2}{a^2} - \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1$$

میباشد . این سطح چون از دو قسمت جداگانه تشکیل شده است دارای مولد مستقیم الخط نمیتواند باشد .

مثال ۵- پارا بولوئید دوار - سطح حاصل ازدوران یك شلجمی حول محورش میباشد . معادله نصف النهار : $x^2 = 2pz$ ومعادله سطح : $x^2 + y^2 = 2pz$ خواهد بود .

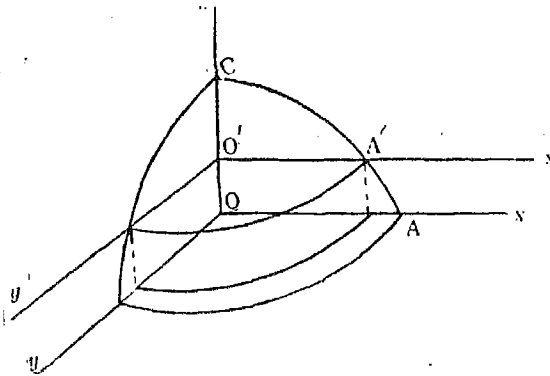
سطوح درجه دوم

۳۰۱ - ثابت میشود که چنانکه در سطوح پیش بجای مدارات ، بیضی و یا هذلولیهای متشابه قراردهیم عمومی‌ترین سطوح درجه دوم را خواهیم داشت . صفحه منحنی مولد را صفحه xy ومنحنی هادی راکه درپیش نصف‌النهار مینامیدیم درصفحه xOz میگیریم . سطوحیکه بدین ترتیب بدست میآیند پس از بررسی حالات مختلفه پنج عدد میباشند .

۱ - بیضوی - منحنی هادی در صفحه xOz بیضی بمعادله :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (1)$$

بوده برای تعیین مولد هاکه درصفحات افقی واقعند بیضی واقع درصفحه $z = 0$ را فرض میکنیم. چون این بیضی باید روی‌منحنی هادی تکیه کند پس یکی ازراوس آن نقطه A هادی بوده و چون نیم محور دیگرانرا به b نمایش دهیم معادلهٔ آن :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

خواهد شد . یك مولد غیر مشخص در صفحه $x'O'y'$ بارتفاع z متجانس این بیضی ودارای نیم‌محورهائی متناسب آن بوده و چون

ش ٥٦

طول آنها را به ma و mb نمایش دهیم پس ازملاحظه آنکه یکی ازاین نیم محورها $O'A'$ یعنی x نقطه A' بیضی (۱) مربوط بارتفاع z است بستگی :

$$m^2 a^2 = a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \quad \text{و یا :} \quad m^2 = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

را خواهیم داشت . حال تمام نقاط مولد مزبور در معادلهٔ :

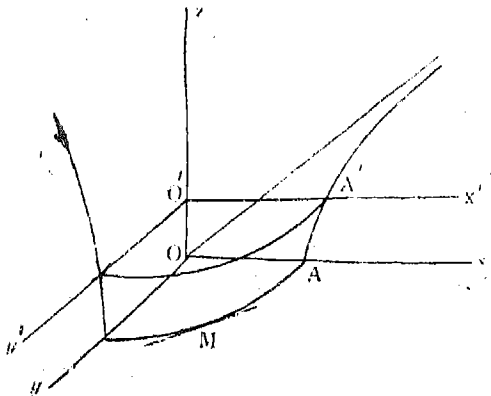
$$\frac{x^2}{m^2a^2} + \frac{y^2}{m^2b^2} = 1 \quad \text{و یا :} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2$$

صدق کرده و چون بجای m^2 مقدارش را قرار دهیم نتیجه میشود که هر نقطه سطح در معادله : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$ و یا : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (۳)

صدق خواهد کرد .

و برعکس ـ از آنچه گفته شد نتیجه میشود که هر نقطه که مختصات آن در این معادله صدق کند روی مولد ارتفـاع z واقع بوده و در نتیجه روی سطح واقع شده است . پس معادله (۳) معادله بیضوی است.

چنانکه دیده میشود صفحات مختصات صفحات تقارن سطح و محورهای مختصات محور های تقارن میباشند .

۴ ـ هیپر بولوئید یك پارچه ـ منحنی هادی درصفحه xOz هذلولی بوده محور کانونی آن Ox و بمعادله

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (٤)$$

میباشد منحنی مولد درصفحه xOy بیضی بمعادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

بوده یك رأس آن نقطه A هادی میبـاشد . یك مولد غیر مشخص

ش ۵۷

بمعادلهٔ : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=m^2$ بوده ویك نیم محورآن بطول : $O'A'=ma$

یعنی x منحنی هادی خواهد بود . دراینجا : $m^2a^2=a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)$

و یا : $m^2=1+\frac{z^2}{c^2}$ شده ودر نتیجه معادله سطح :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2} \quad \text{و یا :} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (٥)$$

خواهد بود . این سطح دارای همان عوامل تقارن بیضوی میباشد .

تبصره ـ این سطح نظیر حالتیکه $b = a$ یعنی دوار است شامل دو دسته بینهایت خط مستقیم میباشد . برای اثبات نقطهٔ از بیضی مولد را بمختصات : $x = a\cos t$ $\quad y = b\sin t$ در نظر گرفته ومماس بر آنرا در این نقطه درنظر میگیریم . معادله آن :

$$\frac{x - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{y - b\sin t}{b\cos t} \quad \text{و یا :} \quad \frac{x}{a}\cos t + \frac{y}{b}\sin t = 1$$

میباشد . حال گوئیم مقطع سطح توسط صفحه قائمیکه ازاین مماس بگذرد ازدو خط تشکیل میشود . این مقطع توسط دستگاه :

$$\frac{x}{a}\cos t + \frac{y}{b}\sin t = 1 \quad \text{و} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2} \qquad (6)$$

تعیین گشته وچنانکه آنرا برحسب $\frac{x}{a}$ و $\frac{y}{b}$ حل کنیم معادلهٔ حاصل برای $\frac{x}{a}$

بصورت :
$$\frac{x^2}{a^2} - 2\cos t\,\frac{x}{a} + 1 = \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)\sin^2 t$$

و یا :
$$\left(\frac{x}{a} - \cos t\right)^2 = \frac{z^2}{c^2}\sin^2 t$$

و بالاخره :
$$\frac{x}{a} - \cos t = \pm\frac{z}{c}\sin t$$

نوشته میشود . معادله حاصل برای $\frac{y}{b}$ از دومین معادله دستگاه (٦) بدست آمده و محاسبه آن :

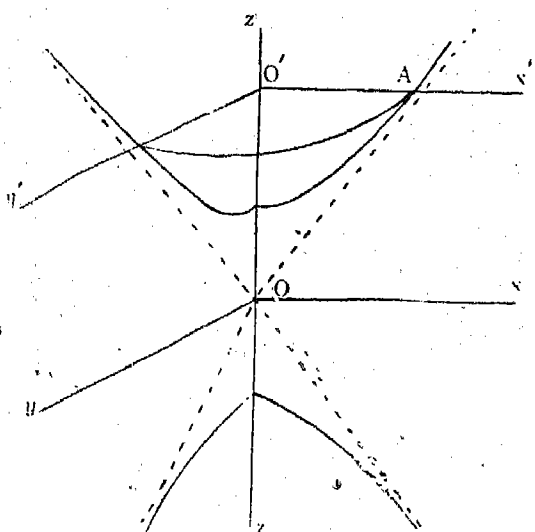
$$\frac{y}{b}\sin t = 1 - \frac{x}{a}\cos t = 1 \mp \frac{z}{c}\sin t\cos t - \cos^2 t = \sin t\left[\mp\frac{z}{c}\cos t + \sin t\right]$$

میباشد . پس دستگاه (٦) بدو دستگاه

$$(7) \qquad \frac{x}{a} = +\frac{z}{c}\sin t + \cos t \quad \text{و} \quad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\cos t + \sin t$$

$$(8) \qquad \frac{x}{a} = -\frac{z}{c}\sin t + \cos t \qquad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\cos t + \sin t$$

تجزیه شده و چنانکه می بینیم نمایش دو خط را میدهد . این دو خط نسبت بصفحه xy قرینه بوده وچنانکه t را تغییر دهیم دو دستگاه مولد مستقیم الخط خواهیم داشت.

۴ ـ هیپر بولوئید دو پارچه ـ منحنی هادی هذلولی بوده محور کانونی آن Oz و بمعادلهٔ $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ میباشد.

ش ۵۸

معادله کلی مولد ها بصورت:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2$$

بوده و چنانکه مثل پیش حساب کنیم معادله سطح:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

خواهد شد.

۴ ـ پارابولوئید بیضوی ـ

منحنی هادی شلجمی بمحور Oz و بمعادله $x^2 = 2pz$ بوده مولد های افقی بیضی هائی بمعادله کلی:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2$$

ش ۵۹

میباشند. در مولد بارتفاع z:

$$\overline{O'A'}^2 = m^2 a^2 = 2pz$$

بوده واز آنجا: $m^2 = \frac{2pz}{a^2}$ خواهد شد. پس معادله سطح: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2pz}{a^2}$ میباشد.

چنانکه قرار دهیم $\frac{a^2}{b^2} = \frac{p}{q}$

معادله سطح را میتوان بصورت: $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0$ نیز نوشت.

مقطع این سطح با صفحه yOz شلجمی $y^2 = 2qz$ میباشد.

۵ ـ پارابولوئید هیپربولیک ـ منحنی هادی همان شلجمی $x^2 = 2pz$

بوده ولی مولد ها دراینحال هذلولی میباشند .

معادله‌کلی آنها : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = m^2$ و این رابطه برای مولد ارتفاع z برقرار است :

ش ۶۰

$m^2 a^2 = \overline{O'A'}^2 = 2pz$

پس : $m^2 = \frac{2pz}{a^2}$ ومعادله

سطح : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2pz}{a^2}$

و یا : $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} - 2z = 0$

پس ازقراردادن : $\frac{a^2}{b^2} = \frac{p}{q}$

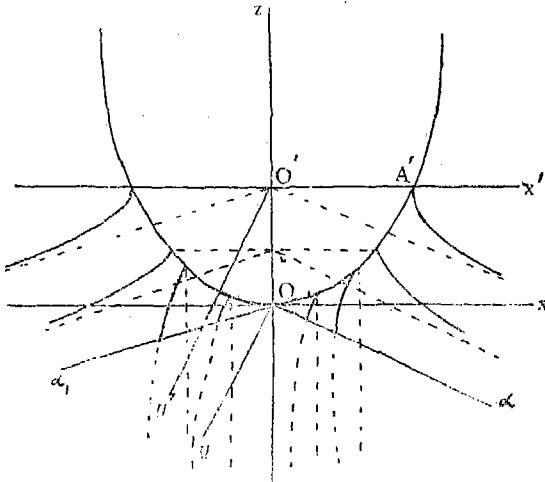
خواهد شد .

چنانکه z ازصفر تا $+\infty$ تغییر نماید مقطع سطح که در اول فقط از دو مجانب تشکیل میشود بمرور بزرگ شده و راوس A' و A'1 به بینهایت میروند .

ولی یك قسمت دیگر سطح هم هست که بامعادله فوق نمایش داده شده وبازاء مقادیر z منفی میباشد . مقاطع افقی که بازاء این مقادیر z گرفته شوند هذلولی هائی بمعادله : $-\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = m^2$ بطوریکه $m^2 = -2z$ باشد خواهند بود .

مجانبهای آنها همان امتداد را داشته ولی زوایائی که درآنها خمها واقعند متفاوت است . ونیز راوس این هذلولیها روی شلجمی $y^2 = -2qz$ که‌مقطع سطح باصفحه $x = 0$ میباشد واقع خواهند بود .

مقاطع این سطح با صفحات $x = \beta = C^{\underline{te}}$ شلجمی های $y^2 = -2q\left(z - \frac{\beta^2}{2p}\right)$ بوده تمام آنها مساوی شلجمی فوق وراوس $z = \frac{\beta^2}{2p}$ آنها روی شلجمی مفروضمان واقع میباشند .

پس میتوان این سطح را ازانتقال شلجمی ثابتی روی شلجمی دیگر بطوریکه

رأس آن روی شلجمی ثابت لغزیده و صفحه آن عمود بصفحه شلجمی ثابت و محور آن موازی محور شلجمی ثابت باشد دانست .

تبصره ۱ - پارابولوئید هیپربولیك شامل دودسته خط میباشد وهردسته خط موازی یك صفحه ثابت بوده واین دوصفحه را صفحه های هادی سطح نامند . معادله این صفحه ها از صفر کردن مجموع جملات درجه دوم در معادله سطح یعنی : $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$ بدست آمده واز آنجا دو صفحهٔ : $\frac{x}{\sqrt{p}} \pm \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ نتیجه میشود .

ثابت میشود که اولاً هرصفحه موازی یکی از این صفحات ، سطح را در طول یك خط مستقیم قطع مینماید . زیرا صفحه موازی $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0$ بمعادلهٔ $\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \lambda$ بوده و مقطع توسط دستگاه :

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \lambda \quad \text{و} \quad \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) - 2z = 0$$

نمایش داده میشود . حال این دستگاه معادل :

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = \lambda \quad \text{و} \quad \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) - 2z = 0$$

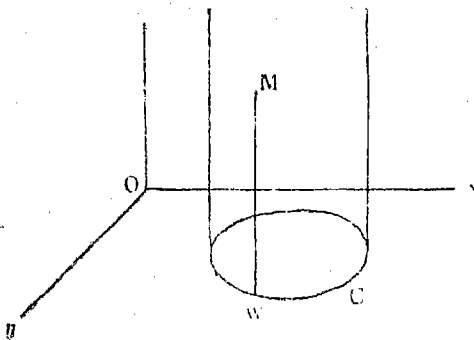
بوده و دیده میشود که نمایش یك خط را میدهد . وهمچنین است برای صفحه دوم .

تبصره ۲ - پارا بولوئید را متساوی الساقین گویند چنانکه دو شلجمی اصلی مساوی باشند یعنی $q = p$ باشد . مقاطع افقی در اینحال هذلولیهای متساوی الساقین بوده ومعادله سطح : $x^2 - y^2 - 2pz = 0$ میباشد . چنانکه دراینحال محور های مختصات را محور Oz و دو خط $O\alpha$ و $O\alpha_1$ که تصویر مجانبها روی xOy ودر اینحال نیمساز های زاویه xOy هستند بگیریم ، دستور های تبدیل مختصات

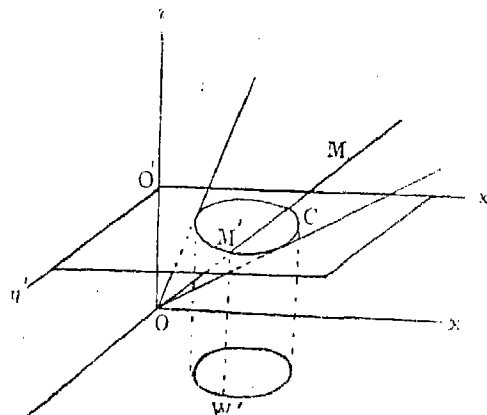
$$x = X\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - Y\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$$

$$y = X\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + Y\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y) \qquad z = Z$$

خواهند بود واز آنجا معادله سطح بصورت $XY - pZ = 0$ نوشته میشود .

۳۰۲ـ استوانه ـ استوانهٔ موازی Oz در نظر گرفته برای آنکـه نقطه M روی آن واقع باشد لازم و کافی است کـه تصویر W آن بر xOy درروی اثر C استوانه واقع باشد.
معـادله C را در صفحه xOy بصورت : $F(x,y)=0$ گرفته چون مختصات (x,y) نقطه W همان مختصات x و y نقطه M اند پس این معادله شرط آنکه M روی استوانه باشد بیان کرده واز آنجا معادله استوانه خواهد بود.

ش ٦١

پس معادلهٔ هراستوانه که مولدهای آن عمود بیکی ازصفحات مختصات باشند همان معادله اثر استوانه روی این صفحه خواهد بود.

۳۰۳ ـ مخروط ـ مخروطی را توسط رأس و منحنی هادیش C فرض کرده مبداء O را در رأس ومنحنی C را مسطحه وموازی صفحه xOy نیز میگیریم. معادله این منحنی $z=c \quad \psi(x,y)=0$ بوده وچون تصویر این منحنی روی xOy مساوی همان C در صفحه $x'O'y'$ است پس معادله آن در این صفحه $\psi(x',y')=0$ خواهد بود.

نقطه $M(x,y,z)$ را روی مخروط گرفته و $M'(x',y',c)$ را اثر OM روی $x'O'y'$ فرض میکنیم. چون M و M' و O روی یك خط واقعند پس: $\frac{c}{z}=\frac{y'}{y}=\frac{x'}{x}$ بوده واز آنجا: $x'=c\frac{x}{z}$ و $y'=c\frac{y}{z}$

ش ٦٢

خواهند بود . چون M روی مخروط است پس 'M روی C بوده واز آنجا لازم میآید که : $\psi\left(c\frac{x}{z}, c\frac{y}{z}\right) = 0$ باشد. پس این معادله معادله مخروط خواهد بود . چنانکه دیده میشود این معادله نسبت به x ، y ، z همگن میباشد .

و برعکس هرمعادله همگن از x و y و z نمایش یك مخروط که رأس آن در مبداء مختصات است نمایش میدهد .

زیراکه میتوان معادله آنرا بصورت : $\psi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$

نوشته و چنانکه دیدیم این معـادله مخروطی که رأس آن O و هادی آن منحنی $\psi(x, y) = 0$ $z = 1$ است نمایش میدهد .

۳۰۴ ـ مخروطهای درجه دوم ـ هرمخروط درجه دوم چنانکه مبداء را به رأس آن منتقل کنیم معادلهٔ بصورت :

$$A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B y z + 2 B' z x + 2 B'' x y = 0$$

خواهد داشت . مقطع این مخروط توسط یك صفحه یك منحنی درجه دوم خواهد بود . زیرا میتوان صفحه قاطع را موازی xy فرض کرده و در اینحال معادله مقطع :

$$z = c, \quad A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B y z + 2 B' z x + 2 B'' x y = 0$$

ویا : $z = c, \quad A x^2 + 2B'' x y + A' y^2 + 2 B' c x + 2 B c y + A'' c^2 = 0$

خواهد بود . معادله دوم نمایش تصویرمنحنی روی xOy را نیز داده وچون ازدرجه دوم است پس قضیه ثابت میشود . پس میتوان این قضیه‌را بدین ترتیب نیز بیان نمود:

منحنی هادی هر مخروط درجه دوم یك بیضی ، هذلولی ویا شلجمی میباشد .

وبرعکس هرمخروط برأس O ومنحنی هادی درجه دوم واقع درصفحه $z = c$ دارای معادلهٔ از درجه دوم خواهد بود .

پایان

فهرست

صفحه

صفحه